

Московский ордена Трудового Красного Знамени  
Физико-Технический институт  
Факультет Физической и Квантовой Электроники  
Кафедра физики и технологии наноэлектроники

# **Моделирование эмиссионной томографии с конфокальной системой коллиматоров**

Выпускная квалификационная  
работа на степень бакалавра  
студента 354 гр. Курьяновича Е.Е.

Научный руководитель

Д.ф.-м.н. Зайцев С.И.

Работа выполнена в ИПТМ РАН  
Черноголовка, 2007 г.

# Содержание

1. Принципы компьютерной томографии	
1.1 Определение и классификация.....	3
1.2 История.....	7
1.3 Сфера применения.....	8
2. Методы реконструкции.....	8
2.1 Преобразование Радона.....	8
2.2 Алгебраический метод.....	11
3. Разрешение для системы параллельных коллиматоров.....	11
4. Постановка задачи.....	13
5. Цели.....	14
6. Вывод функции источника.....	15
6.1 Условия применимости.....	17
7. Результаты моделирования.....	18
Выводы.....	21
Литература.....	22

# Принципы компьютерной томографии

## 1.1 Определение и классификация

Томография (греч.  $\tau\omicron\mu\eta$  — сечение) — метод неразрушающего послойного исследования внутренней структуры объекта посредством

получения большого количества проекций в различных пересекающихся направлениях. В широком смысле, синоним термина компьютерная томография, так как все современные томографические методы реализуются с помощью компьютерной техники.

С точки зрения взаиморасположения источника

зондирующего излучения, объекта и детектора томографические методы могут быть разделены на следующие группы:

трансмиссионные — регистрируется зондирующее внешнее излучение, прошедшее через пассивный (неизлучающий) объект, частично

ослабляясь при этом;

эмиссионные — регистрируется излучение, выходящее из активного (излучающего) объекта с некоторым пространственным

распределением источников излучения;

комбинированные трансмиссионно-эмиссионные (люминесцентные, акустооптические и оптоакустические и др.) — регистрируется

вторичное излучение от источников, распределенных по объему объекта и возбужденных внешним излучением;

эхозондирование — регистрируется зондирующее внешнее излучение, отраженное от внутренних структур пассивного объекта.

Дадим, в соответствии с работой [13], обзор наиболее распространенных видов томографии.

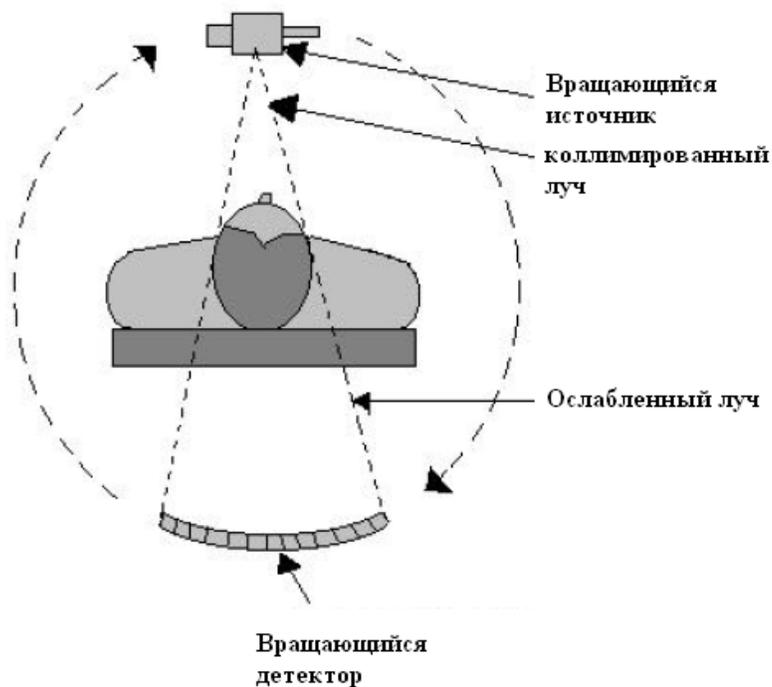


Рисунок 1. Схема рентгеновского томографа.

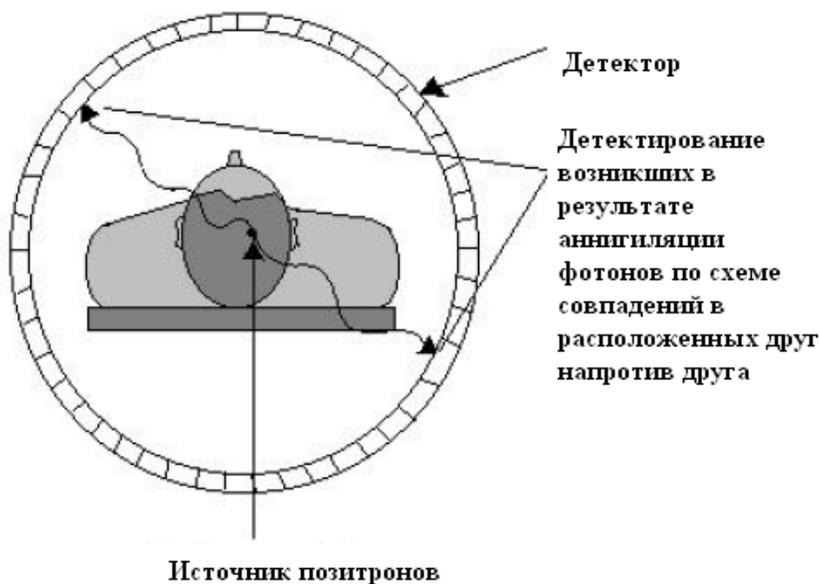


Рисунок 2. Схема позитронно-эмиссионной томографии.

На рисунке 1 изображена схема, используемая в рентгеновском томографе. В рентгеновской томографии, иногда называемой радиографией, пациент неподвижен, в то время как детектор и источник излучения вращаются вокруг него, останавливаясь в определенных положениях. Тогда сколлимированный луч, испущенный источником рентгеновских лучей, пропускается через пациента на детектор. Луч коллимируется для получения изображения только интересующей нас части объекта [15].

На рисунке детектор используется для получения двумерной картины тела пациента. Проекция под различными углами получается за счет вращения источника и детектора вокруг тела. Затем с помощью компьютерной программы осуществляется восстановление.

Позитронно-эмиссионная томография используется для получения трёхмерной информации о распределении радиофармацевтических препаратов (РФП). Типичный детектор представлен на рисунке 2. Процесс состоит из следующих этапов:

1. Создание с помощью ускорителя радиоактивного меченого атома и введение его в тело.
2. Радиоизотоп распадается с излучением позитрона.
3. В теле позитрон аннигилирует с электроном.
4. В результате аннигиляции рождаются два гамма-кванта с энергиями 511 кэВ, разлетающиеся вдоль одной прямой в противоположных направлениях.
5. Два гамма-кванта обнаруживаются за счет совпадения.
6. Обнаружение совпадений возможно благодаря контуре, который регистрирует только события, при которых оба детектора зарегистрировали одинаковые сигналы.
7. С помощью томографического анализа восстанавливается распределение меченых атомов.

Кратко упомянем о наиболее часто используемых в этом методе РФП. На сегодняшний день в ПЭТ в основном применяются позитрон излучающие

изотопы элементов второго периода периодической системы: углерод-11 ( $T_{1/2}= 20,4$  мин.), азот-13 ( $T_{1/2}=9,96$  мин.), кислород-15 ( $T_{1/2}=2,03$  мин.) и фтор-18 ( $T_{1/2}=109,8$  мин.). Фтор-18 обладает оптимальными характеристиками для использования в ПЭТ: наибольшим периодом полураспада и наименьшей энергией излучения. С одной стороны относительно небольшой период полураспада фтора-18 позволяет получать ПЭТ изображения высокой контрастности при низкой дозовой нагрузке на пациентов. Низкая энергия позитронного излучения обеспечивает высокое пространственное разрешение ПЭТ изображений. С другой стороны период полураспада фтора-18 достаточно велик, чтобы обеспечить возможность транспортировки РФП на основе фтора-18 из централизованного места производства в клиники и институты, имеющие ПЭТ сканеры (т.н. концепция сателлитов), а также расширить временные границы ПЭТ исследований и синтеза РФП.

Третьим методом является однофотонная эмиссионная компьютерная томография (Single Photon Emission Computed Tomography, SPECT). Подобно позитронно-эмиссионной томографии, SPECT позволяет получить высокое разрешение при восстановлении распределения радиоактивного вещества. Оно, как и в предыдущем методе, вводится в пациента, но для его создания не требуется циклотрон. Радиоактивный изотоп распадается внутри пациента, и детектор (гамма-камера) регистрирует результаты распада. Рисунок 3 иллюстрирует этот метод. Как и в рентгеновской томографии, компьютер используется для накопления отдельных проекций и восстановления вида источника.

Принципиальным преимуществом этого метода, как это сейчас установлено, является возможность получения функциональной информации, которую сложно или невозможно получить с помощью других методик.

Функциональной называется информация, получаемая, когда

радиофармацевтические препараты вступают в контакт с анатомической структурой животного в организме. Несомненно, именно из-за этого СПЕКТ получил сейчас более широкое распространение. Это уникальный путь для неинвазивного изучения биомедицинских процессов в живых организмах.



Рисунок 3

В отличие от, например, радиографии, СПЕКТ может показать увеличение и уменьшение активности части мозга мышцы, поскольку радиофармацевтический препарат проходит по организму.

## 1.2 История

Начало современной томографии было положено в 1917 г., когда австрийский математик И. Радон предложил [1] способ обращения интегрального преобразования, впоследствии получившего его имя (см. преобразование Радона). Однако работа Радона в своё время не попала в поле зрения исследователей и была незаслуженно забыта.

В 1963 г. американский физик А. Кормак повторно (но отличным от Радона способом) решил задачу томографического восстановления, а в 1969 году

английский инженер-физик Г. Хаунсфилд из фирмы EMI Ltd. сконструировал «ЭМИ-сканер» (EMI-scanner) — первый компьютерный рентгеновский томограф, чьи клинические испытания прошли в 1972 году. В 1979 году Кормак и Хаунсфилд «за разработку компьютерной томографии» были удостоены Нобелевской премии по физиологии и медицине. А в 2003 за изобретение метода магнитно-резонансной томографии Нобелевскую премию по физиологии и медицине получили Питер Мэнсфилд и Пол Лотербур.

### **1.3 Сфера применения**

По сфере применения выделяют:

медицинскую томографию (как вид медицинской визуализации и медицинской диагностики);

промышленную (техническую) томографию (как вид дефектоскопии);

томографию макрообъектов.

## **2. Методы реконструкции**

Существуют два основных метода восстановления- метод свертки и обратной проекции, основанный на преобразовании Радона, и алгебраический.

### **2.1 Преобразование Радона**

**Двумерное преобразование Радона.**

В данном случае  $R(s, \alpha)$  есть интеграл от  $f(x, y)$  вдоль прямой  $A$ . Рассмотрение преобразования Радона удобно начать с простейшего случая функции двух переменных, к тому же, именно этот случай наиболее практически важен. Пусть  $f(x, y)$  функция двух действительных переменных, определённая на

всей плоскости и достаточно быстро убывающая на бесконечности (так, чтобы соответствующие несобственные интегралы сходились).

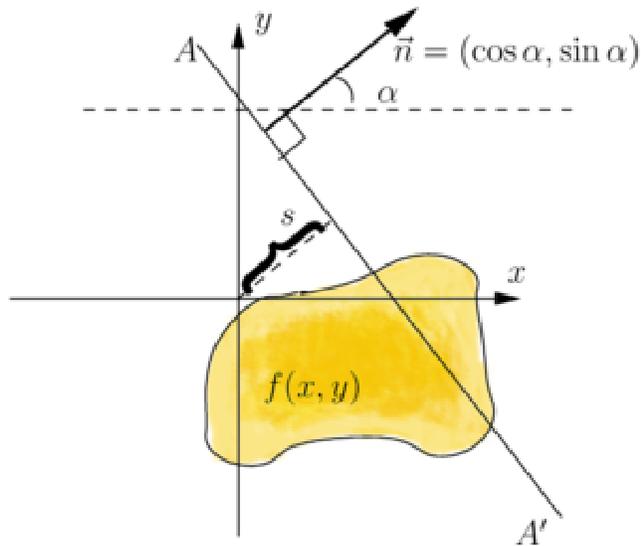


Рисунок 4. Двумерное преобразование Радона

Тогда преобразованием Радона функции  $f(x,y)$  называется функция

$$R(s, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha) dz \quad (1)$$

Преобразование Радона имеет простой геометрический смысл — это интеграл от функции вдоль прямой, перпендикулярной вектору  $\vec{n} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$  и проходящей на расстоянии  $s$  (измеренного вдоль вектора  $\vec{n}$ , с соответствующим знаком) от начала координат.

### Связь преобразования Радона и преобразования Фурье. Формула обращения.

Рассмотрим двумерное преобразование Фурье от функции  $f(x,y)$

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i(k_x x + k_y y)} f(x, y) \quad . (*)$$

Можно заметить, что показатель экспоненты в этом интеграле не изменяется, если мы двигаемся вдоль прямой перпендикулярной вектору  $\vec{k} = (k_x, k_y)$ , и изменяется наиболее быстро если мы движемся вдоль этого вектора. Поэтому удобно перейти к новым переменным. Обозначим  $\vec{k} = (k_x, k_y) = \omega(\cos \alpha, \sin \alpha)$ , мы выберем новые переменные  $s = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ ,  $z = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ . Сделав замену переменных в интеграле, получаем

$$F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\omega s} \int_{-\infty}^{\infty} dz f(s \cos \alpha - z \sin \alpha, s \sin \alpha + z \cos \alpha)$$

т.е.

$$F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} ds e^{-i\omega s} R(s, \alpha)$$

Таким образом, **одномерное преобразование Фурье по переменной  $s$  от преобразования Радона функции  $f$  даёт нам двумерное преобразование Фурье от функции  $f$** . Поскольку двумерное преобразование Фурье достаточно хорошей функции обратимо, то обратимо и преобразование Радона.

Формула обращения для двумерного преобразования Фурье, как известно, выглядит следующим образом

$$f(x, y) = \int \frac{dk_x dk_y}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}\vec{x}} F(k_x, k_y).$$

Для наших целей удобно переписать эту формулу в полярных координатах

$$f(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} d\alpha e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} F(\omega \cos \alpha, \omega \sin \alpha) ,$$

что немедленно даёт **формулу обращения преобразования Радона**

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} \frac{\omega d\omega}{(2\pi)^2} e^{i\omega(x \cos \alpha + y \sin \alpha)} \tilde{R}(\omega, \alpha),$$

где  $\tilde{R}(\omega, \alpha) = \int ds e^{-i\omega s} R(s, \alpha)$ .

## 2.2 Алгебраический метод

В данном методе восстанавливаемое сечение объекта покрывается сеткой из  $N$  пикселей, т.е. переход от непрерывного описания к дискретному осуществляется на первом шаге решения задачи. Это существенное отличие от двух предыдущих случаев, где дискретное представление данных вводится лишь на последнем этапе расчета интегралов. В каждом пикселе значение восстанавливаемой функции  $f_j$  считается постоянным, здесь  $j$  - номер пикселя. Тогда интегральное выражение можно свести к системе линейных алгебраических уравнений:

$$p_i = \left( f, t_i^{\mathbf{I}} \right), \quad i = 1, M,$$

где  $j$ -ая компонента вектора  $t_i^{\mathbf{I}}$  есть весовой коэффициент, который при использовании модели бесконечно-тонкого луча [14]. равен длине пути рентгеновского луча, пересекающего  $j$ -ый пиксель, а  $M$  - общее число точек на всех зарегистрированных проекциях. Если число проекционных углов равно  $M_j$  а число точек на каждой проекции (число каналов линейного позиционно-чувствительного детектора) равно  $M_{ch}$ , то  $M = M_j M_{ch}$ .

Для решения системы линейных алгебраических уравнений используется итерационный метод.

### 3.Разрешение для системы параллельных коллиматоров

Разрешение для одного коллиматора дается следующими уравнениями:

[12]:

$$R_c = d ( a_e + b + c ) / a_e$$

$$a_e = a - 2/m$$

где

$R_c$  - разрешение коллиматора

$d$  -апертура

$a$  -толщина коллиматора

$a_e$  -эффективная толщина коллиматора

$m$  -линейный коэффициент ослабления гамма-излучения материалом коллиматора

$b$  - расстояние между источником и входом коллиматора

$c$  - расстояние между выходом коллиматора и поверхностью

Разрешение системы зависит от разрешения коллиматора и разрешения детектора. Разрешение детектора определяется размером пикселя сцинтиллятора. В общем же разрешение детектора это способность камеры локализовать место, вылетевшие из которого фотоны взаимодействуют со сцинтиллятором[16].Как правило, чем больше фотоумножителей используется в детекторе, тем лучше разрешение. Предельное разрешение обусловлено статистическими флуктуациями. Полное разрешение системы дается формулой

$$R_s = (R_c + R_i)^{1/2}$$

Где  $R_i$ -разрешение гамма-камеры[12].Как правило, основной вклад в разрешение системы вносит разрешение коллиматора.

#### 4. Постановка задачи.

Недостатком изложенного выше метода восстановления с использованием преобразования Радона является большая обусловленность решения: при малом входном шуме восстановленное изображение зашумлено сильно. Кроме того, как этот метод, так и алгебраический требуют большого времени на восстановление изображения. Возможным решением этих проблем может быть использование вместо обычной схемы с параллельными коллиматорами (Рис.5) коллиматоров конфокальных, у которых все оси пересекаются в одной точке (Рис.6).



Рисунок 5. Схема с параллельными каналами.

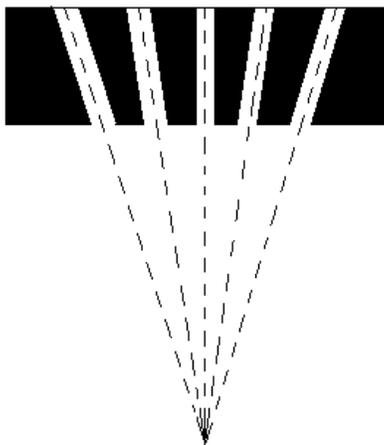


Рисунок 6.

Теоретическому исследованию и моделированию таких систем и посвящена эта работа.

## **5.Цели работы.**

1.Получить функцию источника системы(сигнал от точечного излучателя единичной интенсивности)

2.Используя функцию источника,смоделировать отклик системы при различных положениях центра для разных распределений излучателя и размеров каналов

3.Проверить предположение о том,что для бесконечно тонких коллиматоров сигнал зависит только от плотности в центре системы.

4.Исследовать зависимость разрешения системы от размера каналов,их числа и расстояния между ними.Рассмотреть случай,когда покрываемый коллиматорами телесный угол меньше  $4\pi$

## 6. Вывод функции источника.

Рассмотрим сферу радиусом  $R$ , поверхность которой покрыта одинаковыми цилиндрическими коллиматорами длиной  $L$  и малого радиуса  $a \ll L$ , оси которых пересекаются в центре сферы. Пусть внутри сферы каким-то образом распределено излучающее вещество и регистрируется суммарный сигнал, попадающий на выходные отверстия коллиматоров. Найдем функцию источника  $f(\mathbf{r})$ -сигнал, принимаемый от точечного источника  $A$  единичной интенсивности, расположенного на расстоянии  $r$  от центра системы. Очевидно, что в силу сферической симметрии системы  $f$  может зависеть только от расстояния до центра:  $f=f(r)$ . Будем считать коллиматоры достаточно длинными, а поэтому на приемник каждого из них попадают только сигналы из точек, лежащих внутри его продолжения.

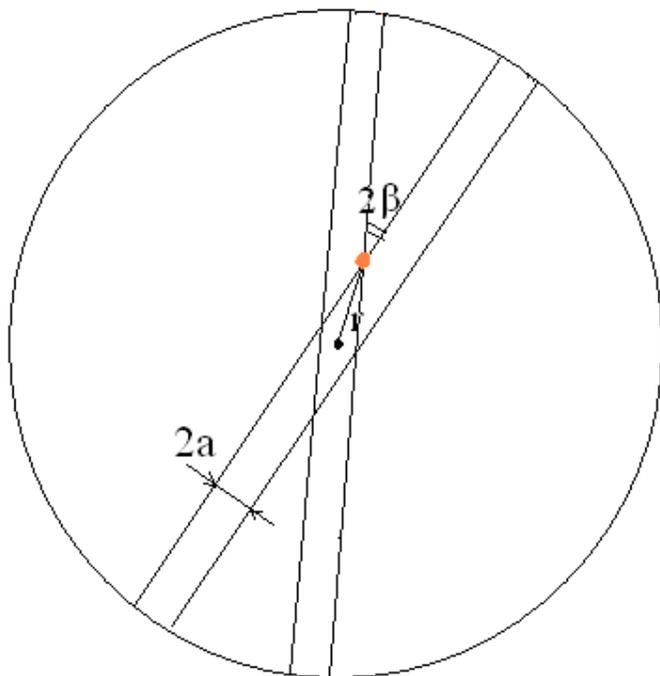


Рисунок 7

Поскольку мы считаем, что коллиматоры покрывают сферу достаточно плотно(условие этого будет выяснено ниже),можно считать, что сигнал от точечного источника попадает только в коллиматоры, расположенные внутри угла  $2\beta$ ,образованного продолжениями граничных коллиматоров, т.е. тех, у которых точка **A** лежит на поверхности(см.рис.1).Тогда  $\beta$  задается уравнением

$$\mathbf{Sin \beta=a/r \Rightarrow \beta=arcsin(a/r) \quad (1)}$$

Сигнал из точки **A** попадет только в коллиматоры, расположенные внутри телесного угла

$$\mathbf{\Omega=2\pi(1-cos \beta)= 2\pi(1-cos(arcsin(a/r)))}$$

Тогда число коллиматоров,из которых видна точка **A**,равно

$$\mathbf{N=k \Omega R^2/\pi (2a)^2= kR^2(1- cos(arcsin(a/r)))/2a^2, \quad (2)}$$

где  $k$ -доля поверхности сферы, покрытая коллиматорами.Чтобы получить функцию источника, необходимо умножить  $N$  на отношение площади одной выходной диафрагмы к площади сферы, радиус которой равен расстоянию до неё. В результате получаем

$$\mathbf{f(r)= (1- cos(arcsin(a/r)))\left[\frac{a^2}{(L+R-r)^2} + \frac{a^2}{(L+R+r)^2}\right]\frac{kr^2}{8a^2} \quad (3)}$$

Сумма в квадратных скобках возникла из-за того, что сигнал из одной точки попадает в два расположенных друг напротив друга соосных канала. Впрочем, как правило можно считать  $L+R \gg r$ ,а значит член в квадратных скобках будет константой, не влияющей на интересующую нас контрастность. Тогда  $f(r)$  будет определяться членом

$$\mathbf{1- cos(arcsin(a/r))}$$

который при  $a < r$  следует заменить единицей, т.к.при этом, очевидно, точка видна из всех каналов. Его график при  $a=1$  приведен на рисунке 2. На бесконечности( $r \gg 1$ ) эта функция ведёт себя как  $1/2r^2$ .

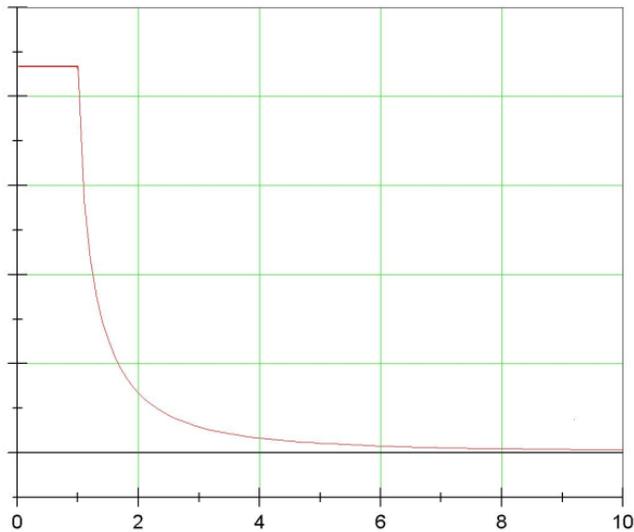


Рисунок 8

#### 4.1 Условия применимости.

Изложенная выше модель справедлива, если число каналов  $N(r)$ , из которых видна данная точка, велико. Воспользовавшись асимптотическим выражением при  $R \gg a$ , получим:

$$N(r) = kR^2/4r^2 \gg 1 \quad (4)$$

При выполнении этого условия применима формула (3). Важно отметить, что согласно этой формуле  $f(r)$  пропорциональна  $k$ , а значит разрешение системы не зависит от расстояния между коллиматорами на сфере. Тогда суммарный сигнал есть свёртка плотности излучающего вещества с функцией источника:

$$I(x_0, y_0, z_0) = \int \int \int \rho(x, y, z) f(x - x_0, y - y_0, z - z_0) dx dy dz \quad (5)$$

## 5. Результаты моделирования.

Для определения возможного разрешения системы с конфокальными каналами было произведено моделирование с использованием программы Mathematica 5.0. Для различных распределений излучающего вещества строились графики зависимости вычисленной по формуле (3) интенсивности принимаемого сигнала от координат центра системы (график плотности и трёхмерный), т.е. на трёхмерной сетке  $n \times n \times n$  производилось численное интегрирование по формуле (5). При этом предполагалось, что  $k=1; L=50; R=50$  (за единицу длины принимался шаг сетки). Для ускорения вычислений в стоящей в квадратных скобках сумме  $r$  считалось малым и опускалось. Справедливость этого допущения подтверждается тем, что при строгом расчете относительная контрастность менялась не более чем на  $10^{-4}$ .

Для исследования затухания сигнала при смещении центра за пределы скопления излучателя был смоделирован однородный излучающий шар, результат представлен на рисунке 9.

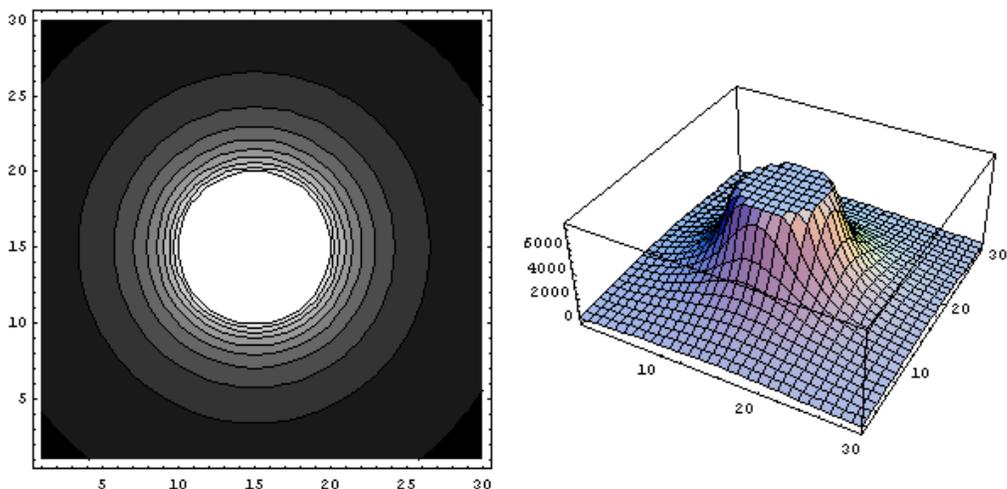


Рисунок 9.  $a=2, R=4, n=3$ .

Исследование взаимного влияния двух скоплений излучающего вещества. Два шара радиуса  $R=4$ , расстояние между центрами  $d=20$ , размер коллиматора  $a=2$ , сетка  $40 \times 40 \times 40$  с шагом 1.

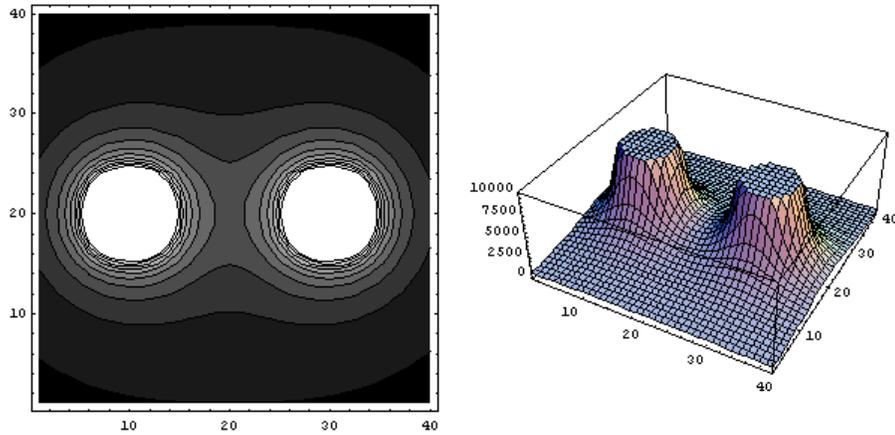


Рисунок 10.  $a=2, n=40$ , расстояние между центрами  $d=20, R_1=R_2=4$ .

Далее была изучена зависимость разрешения системы от размера канала. На рисунках

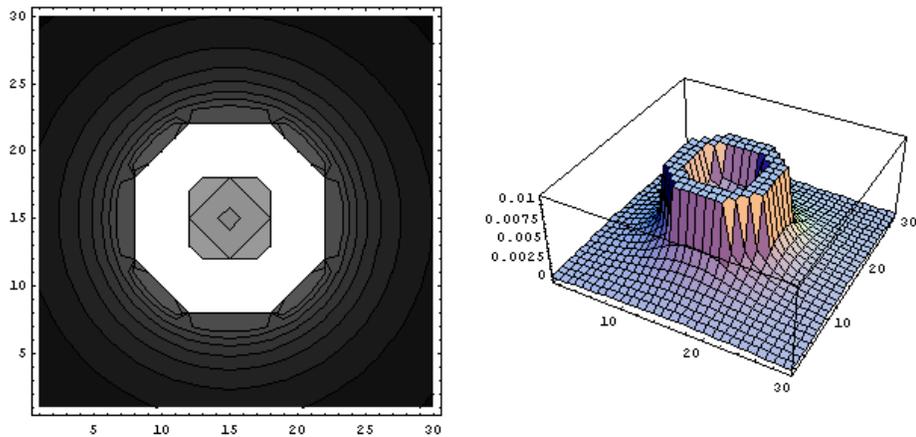
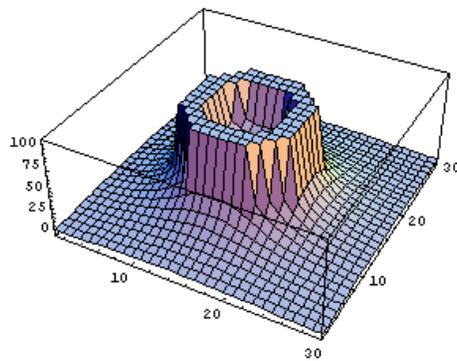
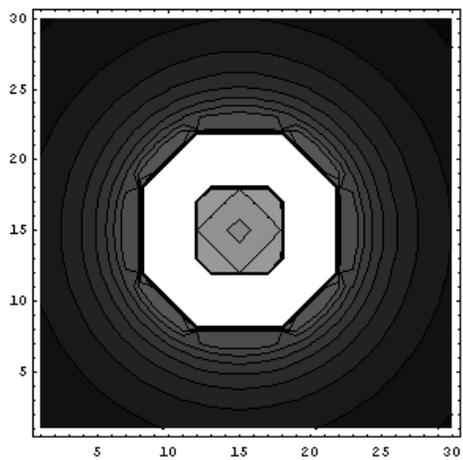
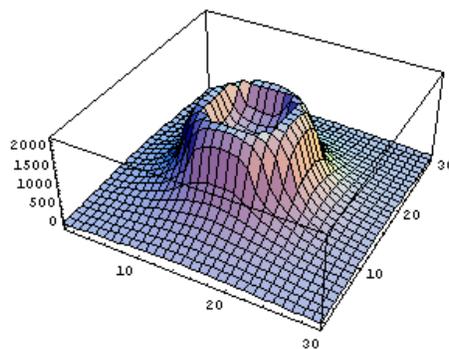
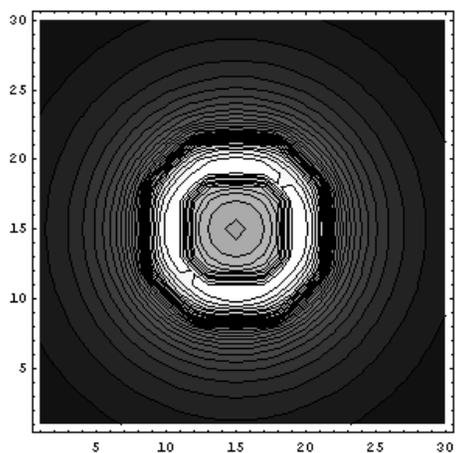


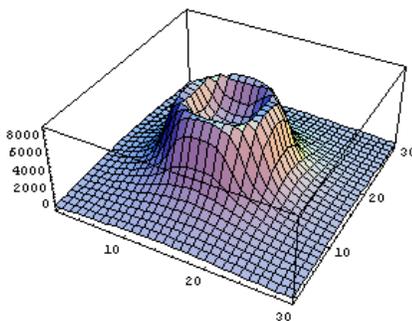
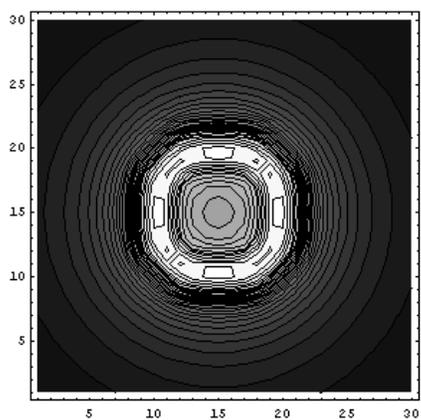
Рисунок 11.  $a=0.001$ .



**Рисунок 122.  $a=0.1$ .**



**Рисунок 133.  $a=0.5$ .**



**Рисунок 14.  $a=1.0$ .**

## **6.Выводы.**

1.Получена функция источника, не зависящая от расстояния между каналами и при  $r \gg a$  пропорциональная  $1/r^2$

2.Основной вклад в сигнал вносят области вблизи центра системы, влияние удаленных источников мало.

3.С уменьшением радиуса коллиматора разрешение картины растёт.Однако даже когда он стремится к нулю, источники вне центра системы вносят вклад в суммарный сигнал.

## Литература

1. J. Radon. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten // *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften*, Bande 29, s. 262-277, Leipzig, 1917.
2. A. C. Kak, M. Slaney Principles of Computerized Tomographic imaging. (IEEE Press, NY 1988)
3. Хорнак Дж. П. Основы МРТ (1996—1999)
4. Cormack A.M. Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it // Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971—1980. — World Scientific Publishing Co., 1992. — p. 551—563
5. Hounsfield G.N. Computed Medical Imaging // Nobel Lectures in Physiology or Medicine 1971—1980. — World Scientific Publishing Co., 1992. — p. 568—586
6. Lauterbur P.C. All science is interdisciplinary – from magnetic moments to molecules to men // Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 2003. — Nobel Foundation, 2004. — p. 245—251
7. Mansfield P. Snap-shot MRI // Les Prix Nobel. The Nobel Prizes 2003. — Nobel Foundation, 2004. — p. 266—283
8. И.С. Грузман *Математические задачи компьютерной томографии*. Соросовский образовательный журнал No. 5, 2001
9. Deans, Stanley R., *The Radon Transform and Some of Its Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1983.

10. Natterer, Frank, *The Mathematics of Computerized Tomography* (Classics in Applied Mathematics, 32), Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001

11. Natterer, Frank and Frank Wubbeling, *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001

12. Weisenberger, A. "Gamma-ray Imaging Detector for Small Animal Research,"  
Doctoral  
Thesis, College of William and Mary, Williamsburg, VA, 1998.

13. Kevin Christopher Knott. SINGLE PHOTON EMISSION COMPUTED TOMOGRAPHY

A senior paper submitted in partial fulfillment of the requirement  
For the degree of Bachelor of Science in  
Physics from the College of William and Mary in Virginia.

14. Чукалина М.В., Бузмаков А.В., Сенин Р.А, Асадчиков В.Е. 2005.  
"Рентгеновская томография: причины артефактов." Материалы совещания  
Нанопизика и наноэлектроника, 294-295

15. Hobbie, R. *Intermediate Physics for Medicine and Biology*, 3rd ed., pp. 417-491, Springer, New York, 1997.

16. Cho, Z.H., Jones, J.P., and Singh, M. *Foundations of Medical Imaging*. pp. 148-233, John Wiley and Sons, New York, 1993.