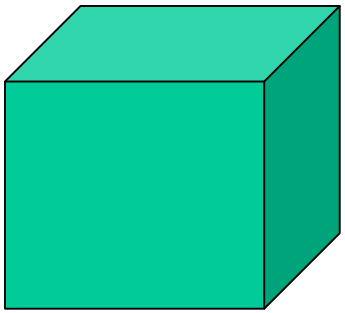
Основные идеи микроскопической теории сверхпроводимости.

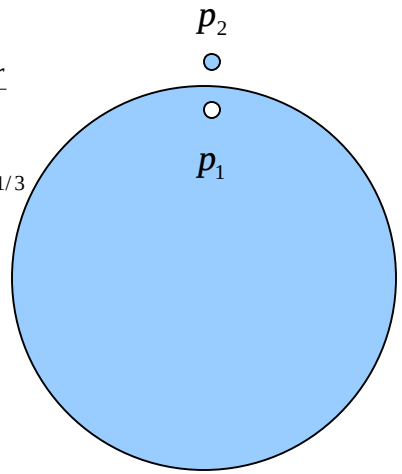
(Продолжение)

Квазичастицы и вторичное квантование.



$$\hat{H}_0\Psi(r)=\sum_{p,s} e_p a_{p,s} y_{p,s} \qquad \Psi(r)=\sum_{p,s} a_{p,s} y_{p,s} = \sum_{p,s} a_{p,s} e^{i\frac{pr}{\hbar}}$$

$$p_x=\frac{2p\hbar k_x}{L_x} \quad p_y=\frac{2p\hbar k_y}{L_y} \quad p_z=\frac{2p\hbar k_z}{L_z} \quad n_e=\frac{N_e}{L_x L_y L_z} \quad p_0=2p\hbar\left(\frac{3n_e}{4p}\right)^{1/3}$$



$$E_0=<\Psi(r_1,...r_N)|\hat{H}_0|\Psi(r_1,...r_N)>=\sum_{p,s} e_p |a_{p,s}|^2 = 2\sum_{|p|\le p_0} e_p$$

$$E_0=<\Psi|\hat{H}_0|\Psi>=<\Psi|\sum_p e_p a^+_{p,s} a_{p,s}|\Psi>=2\sum_{|p|\le p_0} e_p$$

$$a^+_{p2,\uparrow} a_{p1,\uparrow}\Psi(....a_{p1,\uparrow}=1;.....a_{p2,\uparrow}=0;...)=\Psi(....a_{p1,\uparrow}=0;.....a_{p2,\uparrow}=1;...)$$

$$E-E_0=E-mN_e=\sum_{p,s} e_p|a_{p,s}|^2-2\sum_{|p|\le p_0} e_p=<\Psi|\sum_{p,s}(e_p-m)a^+_{p,s}a_{p,s}|\Psi>=<\Psi'|\sum_{p,s}|z_p|a^+_{p,s}a_{p,s}|\Psi'>$$

$$\Psi(....a_{p1,\uparrow}=1;.....a_{p2,\uparrow}=0;...)=\Psi'(....a_{p1,\uparrow}=1;.....a_{p2,\uparrow}=1;...)$$

Новая волновая функция описывает состояние не электронов, а квазичастиц.

Учтем взаимодействие между квазичастицами

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\sum_{r1,s1,r2,s2}\Psi^+_{s1}(r_1)\Psi^+_{s2}(r_2)V(r_1-r_2)\Psi_{s2}(r_2)\Psi_{s1}(r_1)$$

Используется приближение самосогласованного поля.

$U_1=V(r_1-r_2)<\Psi^+_{s2}(r_2)\Psi_{s2}(r_2)>$ Потенциал Хартри. $U_1=V(r_1-r_2)<\Psi^+_{s2}(r_2)\Psi_{s1}(r_1)>$ Обменный потенциал.

$W_1=V(r_1-r_2)<\Psi_{s2}(r_2)\Psi_{s1}(r_1)>$ $\quad W_2=V(r_1-r_2)<\Psi^+_{s2}(r_2)\Psi^+_{s1}(r_1)>$ Потенциал пары.

Предполагается локальность взаимодействия

$$V(r_1-r_2)=-gd(r_1-r_2) \Rightarrow W_1=-g<\Psi_\downarrow(r)\Psi_\uparrow(r)>=-\Delta(r) \qquad W_2=-g<\Psi^+_\downarrow(r)\Psi^+_\uparrow(r)>=-\Delta^*(r)$$

Потенциал спаривания должен удовлетворять самосогласованному уравнению.

$$\Delta(r) = g < \Psi_{\downarrow}(r)\Psi_{\uparrow}(r) >= \frac{Sp\left(e^{-bH} g\Psi_{\downarrow}(r)\Psi_{\uparrow}(r)\right)}{Sp\left(e^{-bH}\right)}$$

$$H = H_0 + H_1 = \sum_s \int dr \Psi_s^+(r) H_0(r)\Psi_0 - \int dr\left[\Delta(r)\Psi_{\uparrow}^+(r)\Psi_{\downarrow}^+(r) + \Delta(r)\Psi_{\downarrow}(r)\Psi_{\uparrow}(r)\right]$$

$$\Delta(r) = \frac{Sp\left(e^{-bH_0}\left[1 - \int_0^b db_1 H_1(b_1) + \int_0^b db_1 \int_0^{b_1} db_2 H_1(b_2) H_1(b_2)\ldots\right] g\Psi_{\downarrow}(r)\Psi_{\uparrow}(r)\right)}{Sp\left(e^{-bH_0}\left[1 - \int_0^b db_1 H_1(b_1) + \int_0^b db_1 \int_0^{b_1} db_2 H_1(b_2) H_1(b_2)\ldots\right]\right)}$$

$$\Delta(r) = \frac{\left\langle\left[1 - \int_0^b db_1 H_1(b_1) + \int_0^b db_1 \int_0^{b_1} db_2 H_1(b_2) H_1(b_2)\ldots\right] g\Psi_{\downarrow}(r)\Psi_{\uparrow}(r)\right\rangle_0}{\left\langle 1 - \int_0^b db_1 H_1(b_1) + \int_0^b db_1 \int_0^{b_1} db_2 H_1(b_2) H_1(b_2)\ldots\right\rangle_0} \qquad H_1(b_1) = e^{b_1 H_0} H_1 e^{-b_1 H_0}$$

В отсутствие магнитного поля.

$$H = \sum_{p,s} |z_p| a_{p,s}^+ a_{p,s} - \Delta \sum_p (a_{p\uparrow}^+ a_{-p\downarrow}^+ + a_{-p\downarrow} a_{p\uparrow}) \qquad \Delta(r) = g \sum_{|z_p| < \hbar w_D} < a_{-p\downarrow} a_{p\uparrow} >$$

$$a_{p\uparrow} = u_p g_{p\uparrow} + v_p g_{-p\downarrow}^+ \qquad a_{p\downarrow} = u_p g_{p\downarrow} - v_p g_{-p\uparrow}^+ \qquad \Delta(r) = g \sum_{|z_p| < \hbar w_D} < u_p v_p (1 - g_{p\uparrow}^+ g_{p\uparrow} - g_{p\downarrow}^+ g_{p\downarrow}) >$$

$$H = \sum_p |z_p| [u_p^2 (g_{p\uparrow}^+ g_{p\uparrow} + g_{p\downarrow}^+ g_{p\downarrow}) + v_p^2 (2 - g_{p\uparrow}^+ g_{p\uparrow} - g_{p\downarrow}^+ g_{p\downarrow})] - \Delta \sum_p u_p v_p (1 - g_{p\uparrow}^+ g_{p\uparrow} - g_{p\downarrow}^+ g_{p\downarrow})$$

$$2z_p = \Delta \frac{1 - 2v_p^2}{u_p v_p} \qquad u_p^2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{z_p}{e_p}) \qquad v_p^2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{z_p}{e_p}) \qquad e_p = (z_p^2 + \Delta^2)^{1/2} \qquad \Delta = 0.5g \sum_p \frac{\Delta}{e_p}(1 - 2n_p)$$

$$1=\frac{g}{2}\sum_p \frac{1-2n_p}{e_p}=\frac{g}{2}\int\frac{d^3p}{(2p\mathbf{h})^3}\frac{1-2n_F(e)}{e_p} \qquad n_F=\frac{1}{\exp\frac{e}{k_BT}+1} \qquad 1=\frac{gN_m}{2}\int_0^{\mathbf{h}w_D}dz_p\frac{th\left[\frac{(z_p^2+\Delta^2)^{1/2}}{k_BT}\right]}{(z_p^2+\Delta^2)^{1/2}}$$

Термодинамика сверхпроводников.

Статистическая сумма

$$Z=\sum_{n,N}e^{\frac{-E_{n,N}+Nm}{T}}=Spe^{\frac{-\hat{H}+\hat{N}m}{T}}$$

Термодинамический потенциал

$$\Omega=-T\ln Z$$

$$\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_{\text{int}}=\hat{H}_0-g\int dr_1dr_2\Psi_\uparrow^+(r)\Psi_\downarrow^+(r_2)\Psi_\downarrow(r_2)\Psi_\uparrow(r_1)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial g}=g^{-1}\frac{Sp\left[H_{\text{int}}e^{\frac{-H+Nm}{T}}\right]}{Sp\left[e^{\frac{-H+Nm}{T}}\right]}=g^{-1}<H_{\text{int}}>$$

$$\Delta(r)=g\sum_{|z_p|<\mathbf{h}w_D}<u_pv_p(1-g_{p\uparrow}^+g_{p\uparrow}-g_{p\downarrow}^+g_{p\downarrow})>$$

$$H_{\text{int}}=-\Delta\sum_p u_pv_p(1-g_{p\uparrow}^+g_{p\uparrow}-g_{p\downarrow}^+g_{p\downarrow})$$

$$<H_{\text{int}}>=-\Delta\sum_p<u_pv_p(1-g_{p\uparrow}^+g_{p\uparrow}-g_{p\downarrow}^+g_{p\downarrow})>=-\frac{\Delta^2}{g} \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial g}=-\frac{\Delta^2}{g^2} \qquad \frac{d\Omega}{d\Delta}=-\frac{dg}{d\Delta}\frac{\Delta^2}{g^2}=\frac{dg^{-1}}{d\Delta}\Delta^2$$

$$\Omega_s-\Omega_n=\int_0^\Delta d\Delta_1\frac{dg^{-1}(\Delta_1)}{d\Delta_1}\Delta_1^2$$

Вблизи нуля $T << T_c$

При T $\to$ 0 th $\to$ 1 $\quad 1=\frac{gN_m}{2}\int_0^{\mathbf{h}w_D}dz_p\frac{1}{(z_p^2+\Delta^2)^{1/2}}=\frac{gN_m}{2}\ln\left(\frac{2\mathbf{h}w_D}{\Delta(0)}\right) \qquad \Delta=2\mathbf{h}w_D\exp\left(-\frac{2}{gN_m}\right)$

$$\ln\frac{\Delta(0)}{\Delta(T)} = \int_0^\infty dz_p \frac{1 - th\left[\frac{(z_p^2 + \Delta^2)^{1/2}}{k_B T}\right]}{(z_p^2 + \Delta^2)^{1/2}} = 2 f\left(\frac{\Delta}{T}\right) \qquad f(x) = \int_1^\infty dy \frac{(y^2 - 1)^{-1/2}}{1 + e^{yx}} \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} K_0(nx)$$

$K_0(x)$ - функция Макдональда

При больших значениях x, $f(x) \gg K_0(x) \gg (p/2x)^{1/2} e^{-x}$ $\Rightarrow$ $\Delta(T) \approx \Delta(0) - [2p\Delta(0)T]^{1/2} e^{-\frac{\Delta(0)}{T}}$ при $T << T_c$

Термодинамический потенциал

$$\Omega_s - \Omega_n = \int_0^\Delta d\Delta_1 \frac{dg^{-1}(\Delta_1)}{d\Delta_1} \Delta_1^2 \qquad g^{-1} = \frac{N_m}{2} \ln\left(\frac{2\hbar w_D}{\Delta(0)}\right) \qquad g^{-1} = \frac{N_m}{2}\left[\ln\left(\frac{2\hbar w_D}{\Delta(0)}\right) - 2 f\left(\frac{\Delta}{T}\right)\right]$$

$$\Omega_s - \Omega_n = -\frac{N_m}{2}\left[\frac{\Delta^2}{2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{T^2}{n^2}\int_0^{n\Delta/T} dx K_1(x) x^2\right] = -\frac{p^2 T^2 N_m}{6} - \frac{N_m}{2}\left[\frac{\Delta^2}{2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} K_2\left(\frac{n\Delta}{T}\right)\Delta^2\right]$$

$\Omega_n = \frac{p^2 T^2 N_m}{6}$ термодинамический потенциал электронов в нормальном состоянии. при $T = 0$ $\Omega_s(0) = -\frac{N_m \Delta^2(0)}{4}$

при $T \gg 0$ $\Omega_s(T) - \Omega_s(0) \approx N_m \Delta^2(0)\left[K_0\left(\frac{\Delta(0)}{T}\right) - K_2\left(\frac{\Delta(0)}{T}\right)\right] = -2 N_m \Delta(0) T K_1\left(\frac{\Delta(0)}{T}\right) \approx N_m (2p\Delta(0)T^3)^{1/2} e^{-\frac{\Delta(0)}{T}}$

Энтропия $S_s = -\frac{\partial \Omega_s}{\partial T} \approx N_m \left(\frac{2p\Delta^3(0)}{T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\Delta(0)}{T}}$

Теплоемкость $C_s = T\frac{\partial S_s}{\partial T} \approx N_m \left(\frac{2p\Delta^5(0)}{T^3}\right)^{1/2} e^{-\frac{\Delta(0)}{T}}$

Энтропия и теплоемкость сверхпроводника уменьшаются экспоненциально с приближением температуры к нолю. Экспоненциальная зависимость $C_s(T)$ μ $exp(-D/T)$ является одним из способов измерения величины щели в сверхпроводниках.

Вблизи критической температуры $T \gg T_c$

При $T \to T_c$; $\Delta \to 0$ $$1 = \frac{gN_m}{2}\int_0^{\hbar w_D} dz_p \frac{th\left[\frac{z_p}{k_B T}\right]}{z_p} = \frac{gN_m}{2}\ln\left(\frac{2\hbar w_D g}{pT_c}\right) \qquad T_c = \frac{2\hbar w_D g}{pk_B}\exp\left(-\frac{2}{gN_m}\right)$$

при $T \gg T_c$ $$\ln\frac{T_c}{T} = \int_0^\infty dz_p \left[\frac{th\left[\frac{z_2}{2T}\right]}{z_p} - \frac{th\left[\frac{(z_p^2+\Delta^2)^{1/2}}{2T}\right]}{(z_p^2+\Delta^2)^{1/2}}\right] \qquad \ln\frac{T_c}{T} = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left(\frac{\Delta}{pT}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}$$

$$\Delta \approx p\left(\frac{8}{7z(3)}\right)^{1/2}[T_c(T_c-T)]^{1/2} \approx 3.06[T_c(T_c-T)]^{1/2}$$ $z(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x}$ - дзета-функция Римана

Вблизи критической температуры величина щели (или потенциала спаривания) в квадрате, как и величина параметр порядка теории Гинзбурга-Ландау, линейно увеличивается с уменьшением температуры, $D^2 \mu T_c - T \mu |Y|^2 \mu n_s$.

Термодинамический потенциал

$$\Omega_s - \Omega_n = \int_0^\Delta d\Delta_1 \frac{dg^{-1}(\Delta_1)}{d\Delta_1}\Delta_1^2 \qquad g^{-1} = \frac{N_m}{2}\left[\ln\frac{2\hbar w_D g}{pT} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\left(\frac{\Delta}{pT}\right)^{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}\right]$$

$$\Omega_s - \Omega_n = -N_m\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{\Delta^{2n+2}}{(pT)^{2n}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^{2n+1}}$$

$$\Omega_s - \Omega_n \approx -N_m \frac{7z(3)}{32}\frac{\Delta^4}{(pT)^2} \qquad \Delta \approx p\left(\frac{8}{7z(3)}\right)^{1/2}[T_c(T_c - T)]^{1/2} \qquad \Omega_s - \Omega_n \approx -\frac{2}{7z(3)}\frac{p_0 m}{\mathbf{h}^3}(T_c - T)^2$$

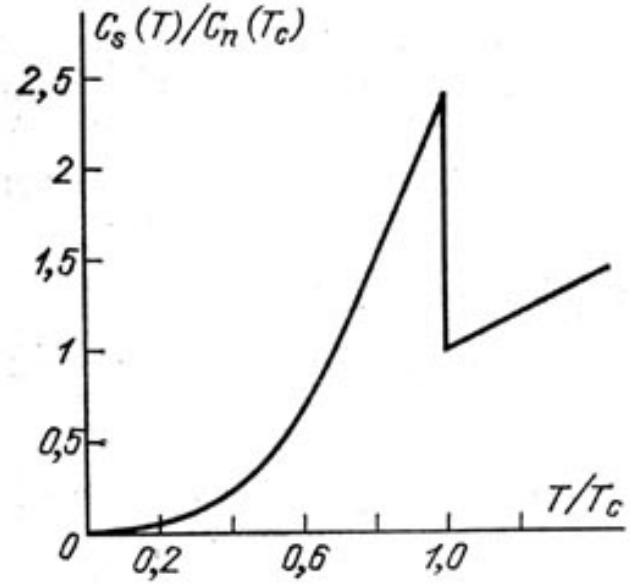
Вблизи критической температуры термодинамический потенциал, как и свободная энергия Гинзбурга-Ландау пропорциональна $(T_c - T)^2$.

Энтропия $$S_s \approx S_n + \frac{4}{7z(3)}\frac{p_0 m}{\mathbf{h}^3}(T_c - T)$$

Теплоемкость $$C_s \approx C_n + \frac{4}{7z(3)}\frac{p_0 m}{\mathbf{h}^3}T_c$$

В нормальном состоянии $$C_n = S_n = \frac{p_0 m}{3\mathbf{h}^3}T$$

Скачек теплоемкости при переходе в сверхпроводящее состоянии равен $$\frac{4}{7z(3)}\frac{p_0 m}{\mathbf{h}^3}T_c$$



Отношение теплоемкостей в сверхпроводящем и нормальном состояниях, согласно теории БКШ, определяется формулой $$\frac{C_s(T)}{C_n(T)} \approx 2.42 + 4.76\frac{T - T_c}{T_c}$$

Термодинамическое критическое поле $$\Delta(0) = \frac{p}{g}k_B T_c \approx 1.76 k_B T_c$$

При низких температурах $$\Omega_s - \Omega_n \approx \frac{H_c^2(T)}{8p}$$ Вблизи T_c

$$H_c()) = (2pN_m)^{1/2}\Delta(0)$$

$$H_c(T) \approx H_c(0)[1 - \frac{g^2}{3}\left(\frac{T}{T_c}\right)^2] = H_c(0)[1 - 1.05\left(\frac{T}{T_c}\right)^2]$$

$$H_c(T) \approx H_c(0)g\left(\frac{8}{7z(3)}\right)^{1/2}[1 - \frac{T}{T_c}] = 1.735 H_c(0)[1 - \frac{T}{T_c}]$$

Теория БКШ и теория Гинзбурга-Ландау.

Л.П. Горьков, ЖЭТФ 36, 1918 (1959); 37, 1407 (1959).

Первое уравнение Гинзбурга–Ландау

$$a(T)\,Y + b\,|Y|^3 Y + (-i\hbar\tilde{N} - qA)^2 Y/2m = 0$$

для чистых сверхпроводников $l \gg x_0 = 0.18\hbar v_F/k_B T_c$

$$\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\Delta(r)+\frac{7z(3)}{8p^2k_B^2T_c^2}|\Delta(r)|^2\,\Delta(r)+\frac{7}{8}z(3)\frac{v_F^2}{6p^2k_B^2T_c^2}(-i\hbar\nabla-2eA)^2\Delta(r)=0$$

для грязных сверхпроводников $l \ll x_0 = 0.18\hbar v_F/k_B T_c$

$$\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\Delta(r)+\frac{7z(3)}{8p^2k_B^2T_c^2}|\Delta(r)|^2\,\Delta(r)+\frac{p}{24}\frac{v_F l}{\hbar k_B T_c^2}(-i\hbar\nabla-2eA)^2\Delta(r)=0$$

Второе уравнение Гинзбурга–Ландау

$$j = (-iq\hbar/2m)(Y^*\tilde{N}Y - Y\tilde{N}Y^*) - (q^2 m_0/m)|Y|^2 A$$

для чистых сверхпроводников $l \gg x_0 = 0.18\hbar v_F/k_B T_c$

$$j(r)=\left(\frac{ie}{m}(\Delta\nabla\Delta^*-\Delta^*\nabla\Delta)-\frac{4e^2}{m}|\Delta|^2\,A\right)\frac{7}{8}z(3)\frac{2mv_F^2N_m}{6p^2k_B^2T_c^2}$$

для грязных сверхпроводников $l \ll x_0 = 0.18\hbar v_F/k_B T_c$

$$j(r)=\left(\frac{ie}{m}(\Delta\nabla\Delta^*-\Delta^*\nabla\Delta)-\frac{4e^2}{m}|\Delta|^2\,A\right)\frac{p}{24}\frac{2mv_F lN_m}{\hbar k_B T_c}$$

для чистых сверхпроводников $l >> x_0 = 0.18 h v_F / k_B T_c$

$$\Psi(r) = \left(\frac{7z(3) m v_F^2 N_m}{24 p^2 k_B^2 T_c^2} \right)^{1/2} \Delta(r) \qquad a = 1.83 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_0^2} \left(\frac{T}{T_c} - 1\right) \qquad b = 0.35 \frac{1}{N_m} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_0^2} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_c)^2}$$

$$x(T) = \sqrt{\frac{7z(3)}{48 p^2}} \frac{\hbar v_F}{k_B T_c} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} = 0.74 x_0 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \qquad k = 0.96 \frac{l_L(0)}{x_0}$$

$$l(T) = \sqrt{\frac{3}{m_0 4 e^2 v_F^2 N_m}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} l_L(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \qquad l(0) = \sqrt{\frac{3}{m_0 2 e^2 v_F^2 N_m}} = \sqrt{\frac{m}{m_0 4 e^2 n_s}}$$

для грязных сверхпроводников $l << x_0 = 0.18 h v_F / k_B T_c$

$$\Psi(r) = \left(\frac{p m v_F N_m}{12 \hbar k_B T_c} \right)^{1/2} \Delta(r) \qquad a = 1.36 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_0 l} \left(\frac{T}{T_c} - 1\right) \qquad b = 0.2 \frac{1}{N_m} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{x_0 l} \right)^2 \frac{1}{(k_B T_c)^2}$$

$$x(T) = 0.85 (x_0 l)^{1/2} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} \qquad l(T) = \sqrt{\frac{3}{m_0 4 e^2 v_F^2 N_m} \frac{7z(3)}{2p^3} \frac{1}{l} \frac{\hbar v_F}{k_B T_c}} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2} = 0.615 \left(\frac{x_0}{l}\right)^{1/2} l_L(0) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{-1/2}$$

$$k = 0.725 \frac{l_L(0)}{l} \qquad k = 7500 r g^{1/2} \qquad r = \frac{2}{3} e^2 N_m v_F l$$ -удельное сопротивление

$$g = \frac{2p^3}{3} N_m k_B^2 \qquad C_e = gT$$ -удельная электронная теплоемкость

Область вблизи второго критического поля.

$$\left\{\ln\frac{T}{T_c}+f_0\left[\frac{\hbar v_F l}{12pk_BT}\left(\frac{d^2}{dx^2}-\frac{4e^2}{\hbar^2}H^2x^2\right)\right]\right\}\Delta(x)=0$$

$$f_0=y\left(\frac{1}{2}+x\right)-y\left(\frac{1}{2}\right) \qquad y\left(x\right)=\frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$$ - дигамма - функция

Зависимость второго критического поля от температуры определяется соотношением

$$\ln\frac{T}{T_c}+f_0\left(\frac{\hbar v_F l}{6pk_BT}eH\right)=0$$

при низких температурах, $T << T_c$

$$H_{c2}\approx\frac{1}{2}\frac{3}{v_F l}\frac{\Delta_0}{e}\left[1-\frac{2}{3}\left(\frac{pk_BT}{\Delta_0}\right)^2\right] \qquad \Delta_0=1.74k_BT_c$$ -энергетическая щель при $T = 0$

вблизи критической температуре , $T_c - T << T_c$

$$H_{c2}\approx\frac{4k_BT_c}{pe}\frac{3}{v_F l}\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\left[1-\left(\frac{1}{2}-\frac{28}{p^4}z\,(3)\right)\left(1-\frac{T}{T_c}\right)\right]$$