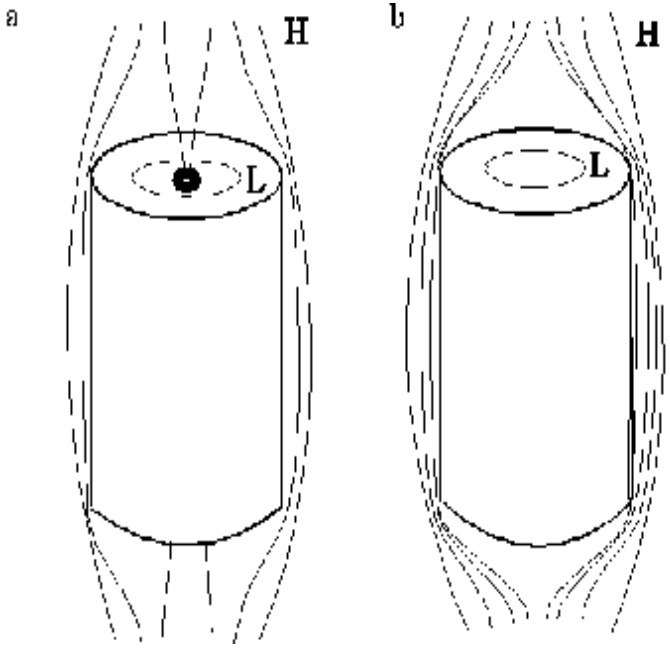
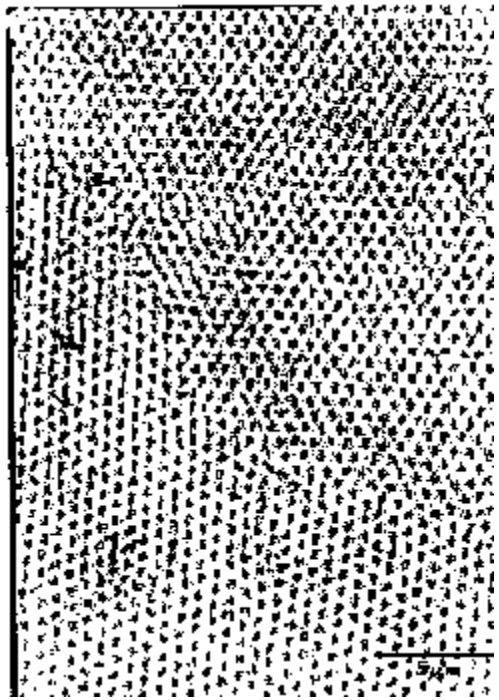
Термические флуктуации и фазовая когерентность.

Сверхпроводящее состояние описывается волновой функцией $Y = |Y| exp(i\, j\,(r))$.





Вихри Абрикосова – сингулярности в смешанном состоянии с фазовой когерентностью. При обходе вокруг вихря фаза волновой функции изменяется на $2p$.

Эффект Мейснера и эффекты квантования связываются с требованием однозначности волновой функции

$$\oint_l dl \nabla j = 2pn \qquad \oint_l dl\, l_L^2 j_s = \frac{\Phi_0}{2p} \oint_l dl \nabla j - \Phi$$

Наблюдаемое соответствие между плотностью вихрей и величиной магнитной индукции $nF_0 = F = BS$ доказывает существование макроскопической фазовой когерентности в состоянии Абрикосова.

$$\oint_l dl \nabla j = 2pn$$ **Вдоль любого контура *l*.**

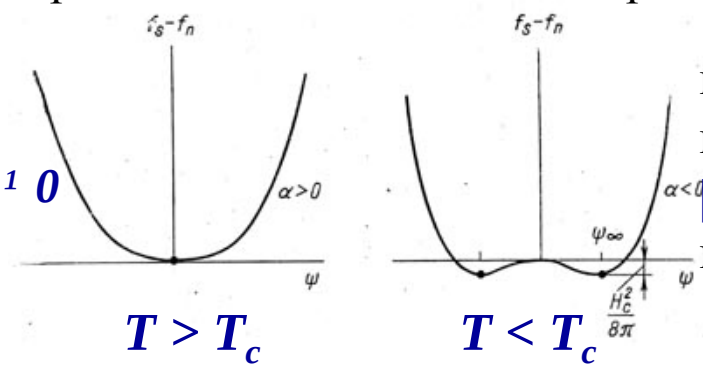
Без учета флуктуаций макроскопическая фазовая когерентность ***exp(i j (r))*** возникает одновременно с появлением ненулевого параметра порядка $|Y|^2$ в T_c или H_{c2}.

$$f_s - f_n = f_{GL} = a_0(\frac{T}{T_c} - 1)|\Psi|^2 + 0.5b|\Psi|^4 + \frac{\mathbf{h}^2}{2m}|\nabla\Psi|^2 \qquad a_0 > 0; b > 0$$

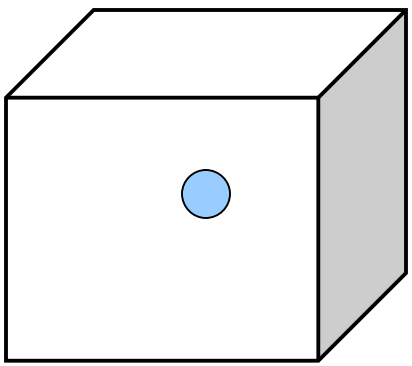
Энергия состояния $F_{GL} = \int_V dV f_{GL}$ Вероятность состояния $P(\Psi) \propto \exp(-\frac{F_{GL}}{k_B T})$

Наибольшая вероятность =наименьшая энергия. $|\nabla\Psi|^2 = 0$

при $T > T_c$ энергия минимальна при $Y = 0$, но $P(\Psi) \propto \exp(-\frac{F_{GL}}{k_B T}) \neq 0$ при $Y \neq 0$

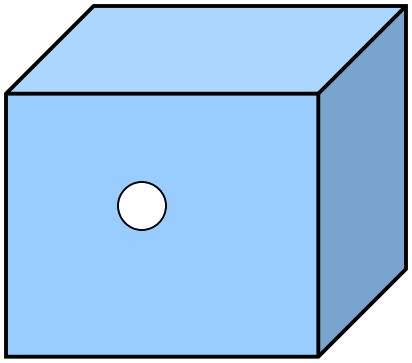


при $T < T_c$ энергия минимальна при $|Y|^2 = -a(T)/b = (a_0/b)(T/T_c - 1)$ но $P(\Psi) \neq 0$ при $Y = 0$



$$P(\Psi) \propto \exp(-\frac{F_{GL}}{k_B T}) = \exp(-\frac{V f_{GL}}{k_B T})$$

Вероятность увеличивается с уменьшением размера флуктуационной «капли». Но размер не может быть бесконечно малым так как есть градиентный вклад в энергию.

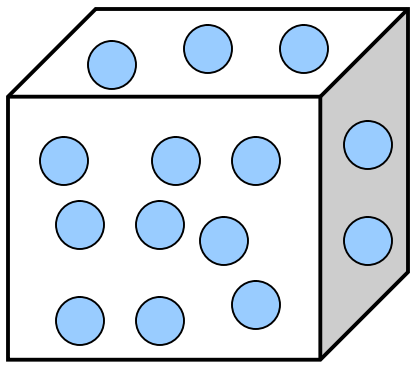


$$f_{GL} = a_0(\frac{T}{T_c} - 1)(|\Psi|^2 + x^2(T)|\nabla\Psi|^2) + 0.5b|\Psi|^4 \qquad x(T) = \frac{\mathbf{h}}{\sqrt{a_0 2m}}\left|\frac{T}{T_c} - 1\right|^{-1/2} = x(0)\left|\frac{T}{T_c} - 1\right|^{-1/2}$$

$$\Psi(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \Psi'_k \exp i(qr)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \Psi'_k \exp i(q_x x+q_y y+q_z z) \quad q=(q_x,q_y,q_z) \quad q_x=\frac{2pk_x}{L_x} \quad q_y=\frac{2pk_y}{L_y} \quad q_z=\frac{2pk_z}{L_z}$$

$$\int_V dxdydz(|\Psi|^2+x^2(T)|\nabla\Psi|^2)=\sum_k[1+x^2(T)(q_x^2+q_y^2+q_z^2)]|\Psi'_k|^2$$

Трехмерный сверхпроводник. $T > T_c$



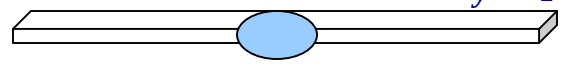
$$x^2(T)q_x^2=\left(\frac{x(T)}{d}\right)^2<1$$

$$x^2(T)q_y^2=\left(\frac{x(T)}{d}\right)^2<1$$

$$x^2(T)q_z^2=\left(\frac{x(T)}{d}\right)^2<1$$

при $d > x(T)$

Одномерный сверхпроводник. L_y, $L_z << x(T)$



$$x^2(T)q_y^2=\left(\frac{x(T)2pk_y}{L_y}\right)^2>>1 \quad \text{при } k_y \; {}^1 \; 0$$

$$x^2(T)q_z^2=\left(\frac{x(T)2pk_z}{L_z}\right)^2>>1 \quad \text{при } k_z \; {}^1 \; 0$$

$$\int_V dxdydz(|\Psi|^2+x^2(T)|\nabla\Psi|^2)=s\sum_k[1+x^2(T)q_x^2]|\Psi'_k|^2$$

$$d\approx x(T)=x(0)\left|\frac{T}{T_c}-1\right|^{-1/2}$$

$$P(\Psi)\propto\exp(-\frac{F_{GL}}{k_BT})\approx\exp(-\frac{Va|\Psi|^2}{k_BT})$$

Величина флуктуаций и размер флуктуационных «капель» увеличиваются с приближением к T_c вследствие уменьшения $|a|=a_0|T/T_c-1|$. **Линейное приближение:** $b=0$.

Ширина **критической области** в которой не применимо линейное приближение определяется числом Гинзбурга $|T/T_c-1|_{cr} = Gi_{nD}$.

при $T = T_c$

$$f_{GL}=0.5b|\Psi|^4+\frac{\mathbf{h}^2}{2m}|\nabla\Psi|^2 \qquad Gi_{3D}=\left(\frac{k_BT}{x^3(0)m_0H_c^2(0)}\right)^2 \qquad Gi_{2D}=\frac{k_BT}{dx^2(0)m_0H_c^2(0)}=\frac{x(0)}{d}Gi_{3D}^{1/2}$$

$$Gi_{1D}=\left(\frac{k_BT}{sx(0)m_0H_c^2(0)}\right)^{2/3}=\left(\frac{x^2(0)}{s}\right)^{2/3}Gi_{3D}^{1/3} \qquad Gi_{0D}=\left(\frac{k_BT}{Vm_0H_c^2(0)}\right)^{2/3}=\left(\frac{x^3(0)}{V}\right)^{1/4}Gi_{3D}^{1/4} \qquad \frac{F_{GL}}{k_BT}=\frac{T/T_c-1}{Gi_{0D}}|\Psi|^2+\frac{1}{2}|\Psi|^4$$

Флуктуации вблизи второго критического поля H_{c2}.

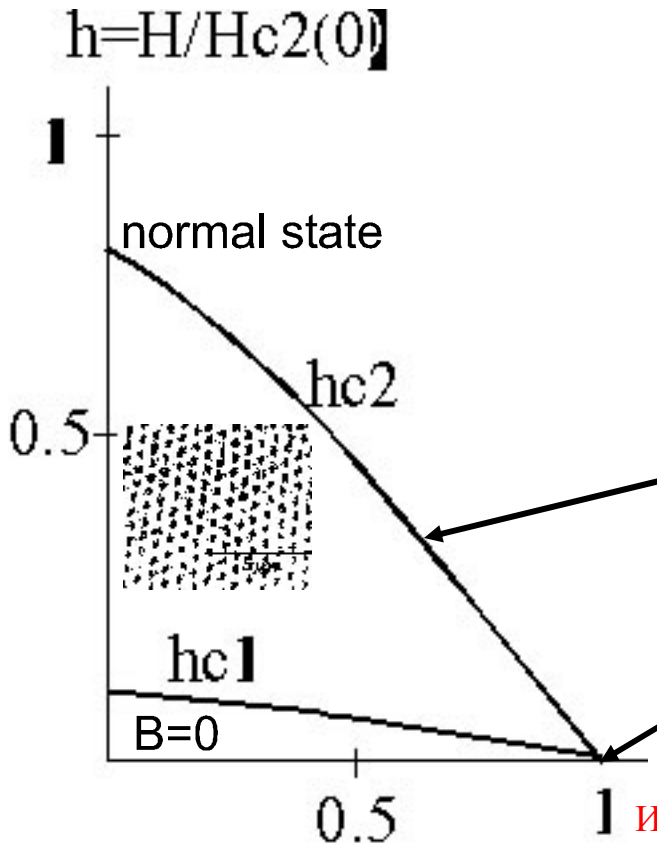
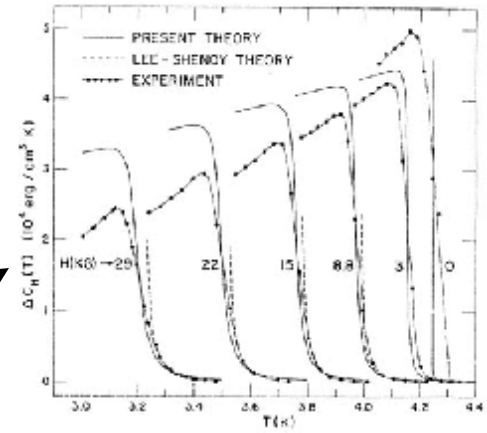


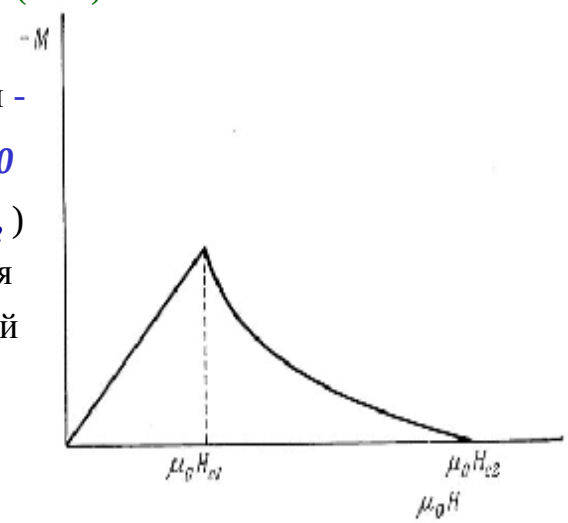
Диаграмма состояний сверхпроводника II рода. Приведенные значения температуры $t = T/T_c$ и магнитного поля $h = H/H_{c2}(0)$.
$t + h > 1$ - выше - H_{c2}
$t + h < 1$ - ниже - H_{c2}

До исследования флуктуаций считалось, что переход в состояние Абрикосова, как и переход в сверхпроводящее состояние в отсутствии магнитного поля является фазовым переходом второго рода, так как в H_{c2} как и в T_c наблюдался скачок теплоемкости. Отсутствие λ - особенности связывалось с малой величиной числа Гинзбурга в сверхпроводниках $Gi_{3D} \approx 10^{-9}$.



Зависимость теплоемкости от температуры при переходе в сверхпроводящее состояние в T_c и H_{c2} объемного сверхпроводника $Ti_{16}Mo_{84}$ при различных значениях магнитного поля H. R. F. Hassing, R. R. Hake, L. J. Barnes, Phys.Rev.Lett. 30, 6 (1973)

Излом в зависимости намагниченности - $M \propto \langle|Y|^2\rangle$ от магнитного поля ($-M = 0$ при $H > H_{c2}$ и $-M \propto H_{c2} - H$ при $H < H_{c2}$) свидетельствует о том, что H_{c2} является особой точкой для зависимости средней плотности сверхпроводящих пар $\langle|Y|^2\rangle(H,T)$.



Вблизи T_c, $T > T_c$, $a(T)=a_0(T/T_c-1) > 0$

$$f_{GL} = a(T)(|\Psi|^2 + x^2(T)|\nabla\Psi|^2) + 0.5b|\Psi|^4$$

Оператор

$$|\nabla\Psi|^2$$

Собственные функции

$$\Psi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \Psi'_k \exp i(q_x x + q_y y + q_z z)$$

Собственные значения

$$(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)|\Psi'_k|^2$$

Вблизи H_{c2}, $T < T_c$, $a(T)=a_0(T/T_c-1) < 0$

$$f_{GL} = a(T)[|\Psi|^2 - x^2(T)|(-i\nabla - \frac{2pA}{\Phi_0})\Psi|^2] + \frac{b}{2}|\Psi|^4$$

$F_0 = ph/e$

Калибровка

$H \parallel z$; $A_x=A_z=0$; $A_y=Hx$

Оператор

$$|(-i\nabla - \frac{2pA}{\Phi_0})\Psi|^2$$

Собственные функции

$$\Psi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_k \Psi'_k j_{n,l}(x,y)\exp i(q_z z)$$

$\exp i(q_x x+q_y y)$ Þ $j_{n,l}(x,y)$

Собственные значения

$$[2(n+0.5)\frac{2pH}{\Phi_0} + q_z^2]|\Psi'_k|^2$$

$$q_x^2 + q_y^2 = \left(\frac{2pk_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{2pk_y}{L_y}\right)^2 \to 2(n+0.5)\frac{2pH}{\Phi_0}$$

Линейное приближение

$$\int_V dV f_{GL} \approx \sum_k a(T)[1 + x^2(T)(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)]|\Psi'_k|^2$$

$$\int_V dV f_{GL} \approx \sum_k a(T)[1 - x^2(T)(2(n+0.5)\frac{2pH}{\Phi_0} + q_z^2)]|\Psi'_k|^2$$

Множители перед некоторыми $|Y'_k|^2$ становятся меньше нуля

при $q_x = q_y = q_z = 0$; $a(T)<0$ т.е. $T < T_c$

$$<|Y|^2> = (a_0/b)(1-T/T_c)$$

при $n = 0$; $q_z = 0$; $H < F_0/2px^2$ т.е. $H < H_{c2}$

$$<|Y|^2> = (a_0/b\, b_A)(1-T/T_c)(1 - H/H_{c2}) = (a_0/b\, b_A)(1-T/T_c - H/H_{c2}(0))$$

Флуктуации выше сверхпроводящего перехода

$H = 0$

$t = T/T_c > 1$

$t - 1 >> Gi_{3D} \approx 10^{-9}$

$$P(\Psi) \propto \exp(-\frac{F_{GL}}{k_B T}) \neq 0$$

Линейное приближение.

$$g(r,z) \mu \exp(-|z|/x_z)\exp(-r/x_r^2)$$

$$P(\Psi) \propto \exp\left(\frac{\sum_k a_0[t-1+x^2(0)(q_x^2+q_y^2+q_z^2)]|\Psi'_k|^2}{k_B T}\right)$$

$$<|\Psi'_k|^2> = \frac{\sum |\Psi'_k|^2 \; P(|\Psi'_k|^2)}{\sum P(|\Psi'_k|^2)}$$

$$<|\Psi'_k|^2> = \frac{k_B T}{a_0[t-1+x^2(0)(q_x^2+q_y^2+q_z^2)]}$$

$$q = (q_x, q_y, q_z) \quad q_x = \frac{2pk_x}{L_x} \quad q_y = \frac{2pk_y}{L_y} \quad q_z = \frac{2pk_z}{L_z}$$

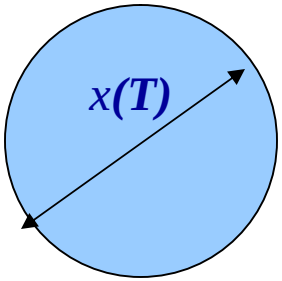
$$<|\Psi|^2> = \frac{1}{V}\sum_k \frac{1}{e_{3D}+q^2} = \frac{1}{(2p)^3}\iiint \frac{dq_x dq_y dq_z}{e_{3D}+q^2}$$

Корреляционная функция

$$R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$g(R) = \left(\frac{mk_B T}{2p\hbar^2 R}\right)\exp[-\frac{R}{x(T)}]$$

$$x(T) = \frac{x(0)}{|T/T_c - 1|^{1/2}}$$



С приближением к T_c флуктуационные «капли» увеличиваются во всех направлениях μ $(T/T_c-1)^{-1/2}$

$H > H_{c2}(0)Gi_{3D}$

$t + h = T/T_c + H/H_{c2}(0) > 1$

$t + h - 1 >> Gi_{3D,H} \approx 10^{-3}$

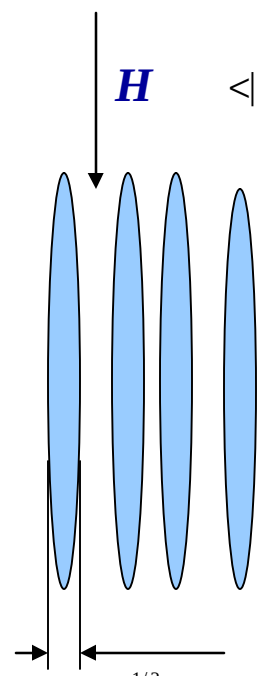
$Gi_{3D,H} = Gi_{3D}^{1/3}(th)^{2/3}$

$$P(\Psi) \propto \left(\frac{\sum_k a_0[t+h-1+x^2(0)q_z^2)]|\Psi'_k|^2}{k_B T}\right)$$

$$<|\Psi'_k|^2> = \frac{k_B T}{a_0[t+h-1+x^2(0)q_z^2]}$$

$$k = (l_x, l_y, k_z) \qquad q_z = \frac{2pk_z}{L_z}$$

$$<|\Psi|^2> = \frac{1}{V}\sum_k \frac{1}{e_{3D,H}+q_z^2} = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq_z}{e_{3D,H}+q_z^2}$$



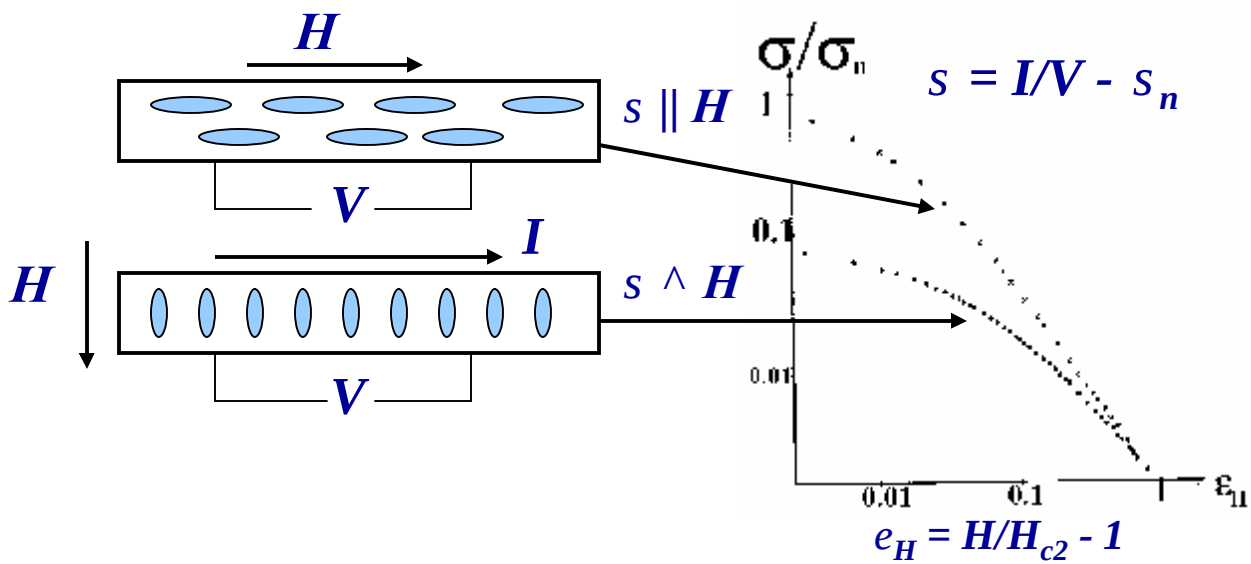
$$x_\perp = \left(\frac{2\Phi_0}{pH}\right)^{1/2} = x(T)2\left(\frac{H_{c2}}{H}\right)^{1/2}$$

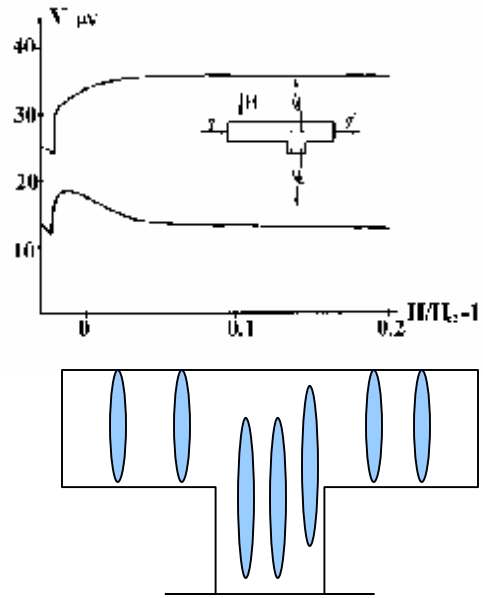
Корреляционная функция

$$g(r,z) \propto \exp(-\frac{pH}{2\Phi_0}r^2)\exp(-\frac{|z|}{x_H})$$

С приближением к H_{c2} флуктуационные «капли» увеличиваются только вдоль магнитного поля μ $x_H = x(T)(H/H_{c2}-1)^{-1/2}$

Измерения избыточной проводимости подтвердили различие корреляционной длины вдоль и поперек магнитного поля вблизи H_{c2}.





Размерность флуктуаций уменьшается на два вблизи H_{c2}: *3D-2D = 1D; 2D-2D = 0D*

P.A. Lee and S.R. Shenoy, Effective Dimensionality Change of Fluctuations in Superconductors in a Magnetic Field. *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1025–1028 (1972)

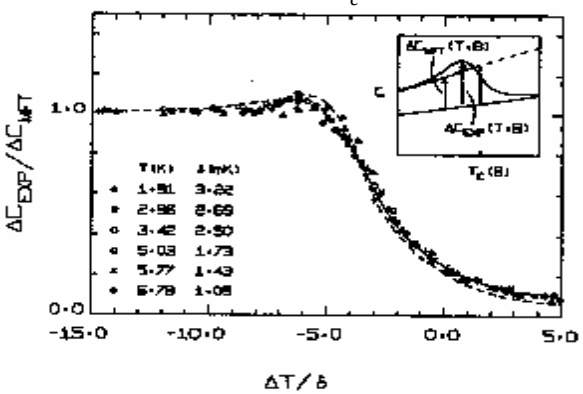
Дальний порядок и фазовом переходе невозможны в одномерных системах.

Вследствие уменьшения размерности флуктуаций ширина критической области в H_{c2}, $Gi_{3D,H} \gg 10^{-3}$ много больше чем в T_c, $Gi_{3D} \gg 10^{-9}$. Это дало возможность проверить экспериментально связан ли скачок теплоемкости в H_{c2} с фазовым переходом второго рода.

При фазовом переходе второго рода должна наблюдаться λ- особенность на зависимости теплоемкости от температуры.

Измерения теплоемкости в критической области, проведенные в 70-е годы, доказали что скачок теплоемкости в H_{c2} не связан с фазовым переходом второго рода.

$$C = T\frac{\partial S}{\partial T} = -T\frac{a_0}{T_c}\frac{\partial <|\Psi|^2>}{\partial T}$$



S. P. Farrant and C. E. Gough, Phys. Rev. Lett. 34, 943 (1975); D. J. Thouless, idid, p.943

Закон подобия

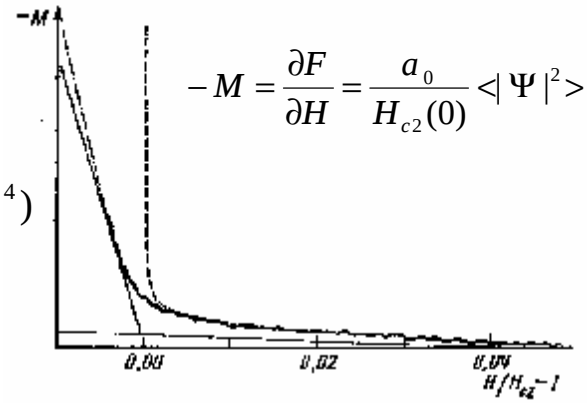
$$F = -k_B T \ln\left(\sum \exp(-\frac{F_{GL}}{k_B T})\right)$$

$$\frac{F_{GL}}{k_B T} = \int_V dV(e_{3D,H}|\Psi|^2 + |\nabla\Psi|^2 + 0.5|\Psi|^4)$$

Термодинамические величины – универсальные функции

$$e_{3D,H} = (t + h - 1)/Gi_{3D,H}$$

$$Gi_{3D,H} = Gi_{3D}^{1/3}(th)^{2/3}$$

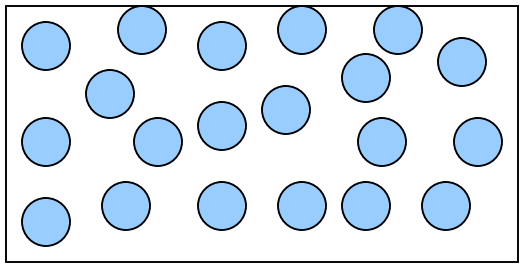


$$-M = \frac{\partial F}{\partial H} = \frac{a_0}{H_{c2}(0)} <|\Psi|^2>$$

В.А.Марченко, А.В. Никулов, ЖЭТФ 86, 1395 (1984)

Изменение намагниченности $-M$ μ $<|Y|^2>$ и теплоемкости C μ $\P<|Y|^2>/\P T$ в H_{c2} связано только с изменением средней плотности сверхпроводящих пар $<|Y|^2>$, но не с появлением фазовой когерентности.

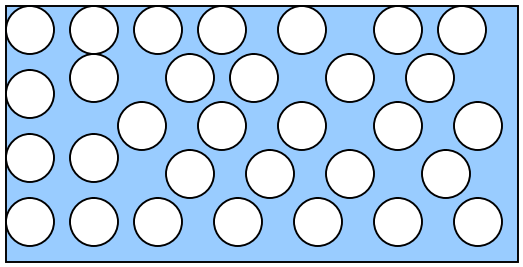
$<|Y|^2> {}^1 0$



В флуктуационном состоянии отсутствует макроскопическая фазовая когерентность.

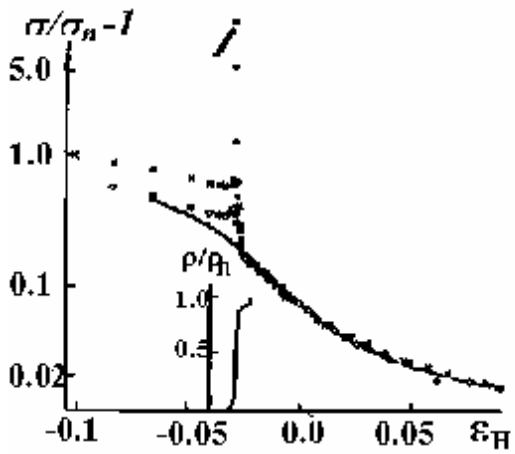
Переход в состояние Абрикосова есть топологический переход, при котором происходит изменение связности сверхпроводящего состояния.

$$\oint_l dl \nabla j = 2pn$$

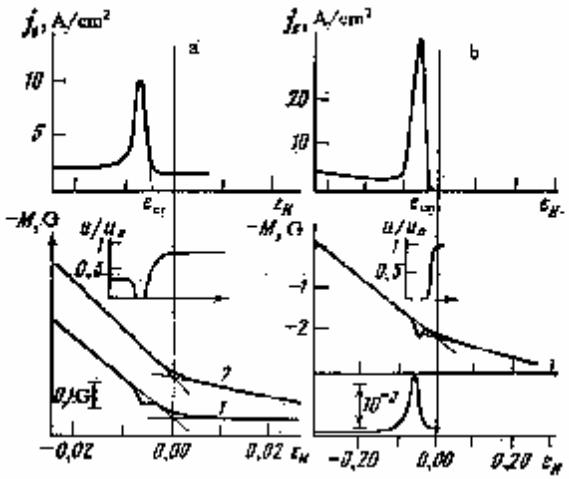


Макроскопическая фазовая когерентность есть дальний порядок состояния Абрикосова.

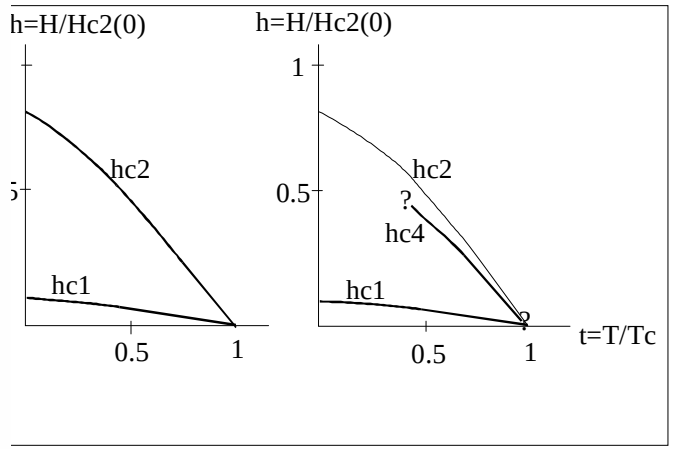
Отсутствие электрического сопротивления в сверхпроводящем состоянии связано с макроскопической фазовой когерентностью. Следовательно, переход в состояние Абрикосова должен быть заметен прежде всего при измерениях резистивных свойств. В 1981 году было обнаружено, что ширина перехода в состояние Абрикосова достаточно совершенных образцов много меньше числа Гинзбурга и переход наблюдается ниже .

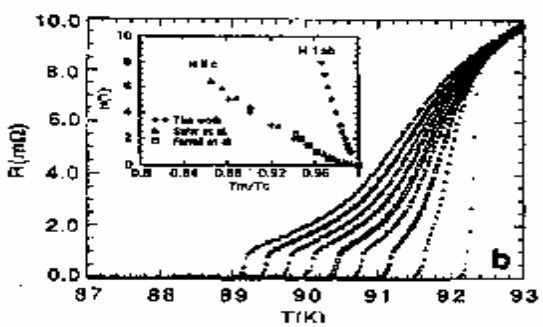


В.А.Марченко, А.В. Никулов, Письма в ЖЭТФ 86, 1395 (1981)

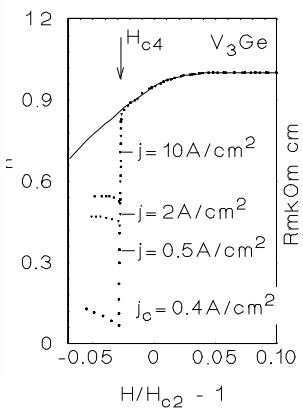


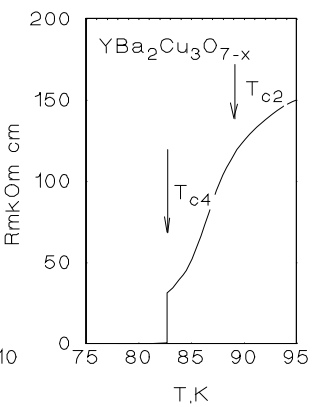
В.А.Марченко, А.В. Никулов, ЖЭТФ 86, 1395 (1984)





$YBa_2Cu_3O_{7-x}$ W.K.Kwok et al., *Phys.Rev.Lett.* **69**, 3370 (1992).





Закон подобия

$e_{3D,H} = (t + h - 1)/Gi_{3D,H}$

$Gi_{3D,H} = Gi_{3D}^{1/3}(th)^{2/3}$

$e_{3D,Hc4} \gg -1$

A.V. Nikulov, *Supercond.Sci.Technol.* **3**, 377 (1990).

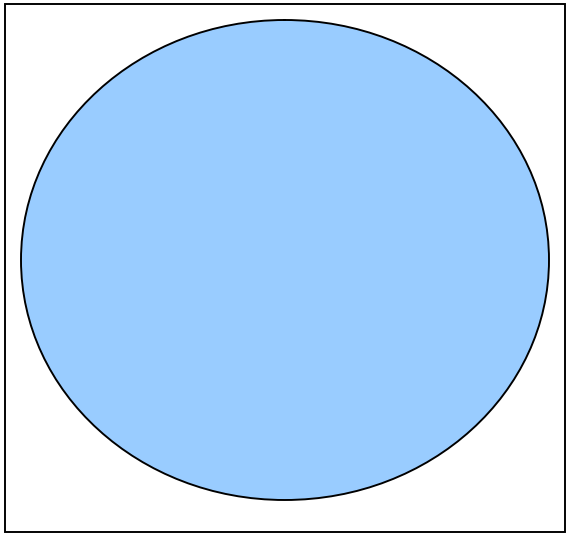
$H_{c2} - H_{c4} = H_{c2}(0)Gi_{3D,H} = H_{c2}(0)Gi_{3D}^{1/3}(th)^{2/3}$

$(H_{c2} - H_{c4})/H_{c2} \gg 0.002$ (NbMo $Gi_{3D} \gg 10^{-9}$); 0.02 (V_3Ge $Gi_{3D} \gg 10^{-6}$)

В H_{c2} изменяется плотность сверхпроводящих пар, в H_{c4} появляется макроскопическая фазовая когерентность, т. е. происходит переход в состояние Абрикосова.

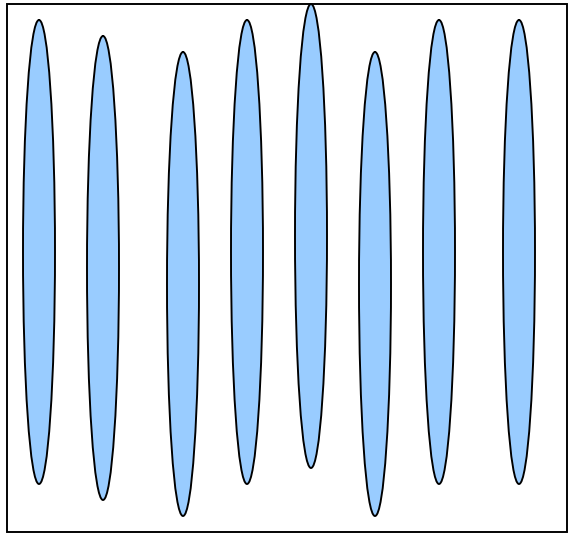
В идеальном сверхпроводнике переход в состояние Абрикосова должен быть фазовым переходом первого рода.

T ® T_c



При фазовом переходе длина фазовой когерентности достигает размеров сверхпроводника » **1 - 10 мм.** Размер флуктуационных «капель» выше T_c $x(T)$ = $x(0)(T/T_c-1)^{-1/2}$ » 10^{-4} **мм** в **Nb** при T/T_c-1 » **0.1.** Размер поперек магнитного поля при $H=H_{c2}$ $2x$»10^{-4} **мм**

$H > H_{c4}$



При фазовом переходе второго рода происходящем в нулевом магнитном поле размер флуктуационных «капель» непрерывно возрастает с приближением к T_c: пропорционально $(T-T_c)^{-1/2}$ в области линейного приближения $T/T_c-1 > Gi_{3D}$ и $(T-T_c)^{-a}$ в критической области $T/T_c-1 < Gi_{3D}$.

Так как размер флуктуационных «капель» поперек магнитного поля не увеличивается, вблизи длины фазовой когерентности может измениться только скачком от $2x$»10^{-4} **мм** до » **1 - 10 мм**, если сверхпроводник не имеет дефектов, центров пиннинга.

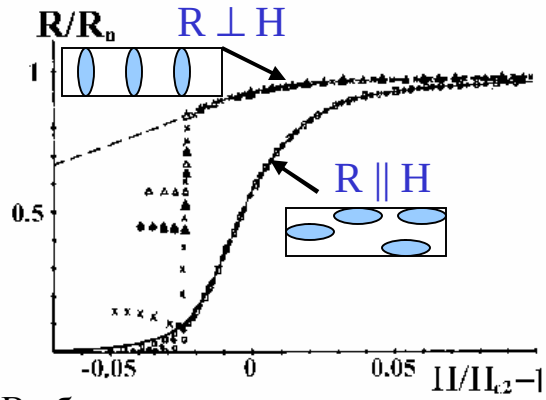
Дефекты не влияют на переход в T_c и сильно влияют на переход H_{c4}, так как размер дефектов и расстояние между ними являются дополнительными размерами.

«Переход в состояние Абрикосова может быть связан с наличием центров пиннинга»

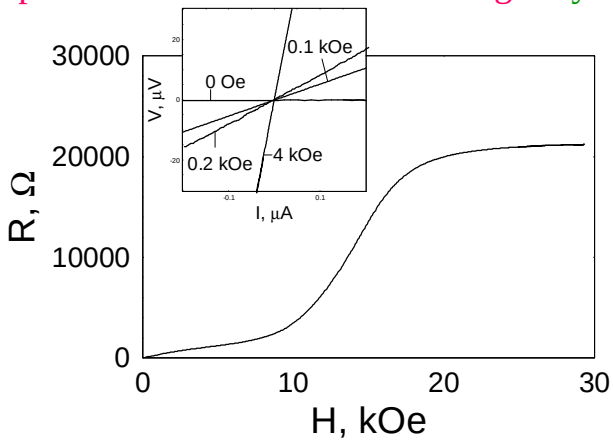
Л.Г. Асламазов, 1985 год (private communication).

Отсутствие перехода в состояние Абрикосова в двумерных сверхпроводниках.

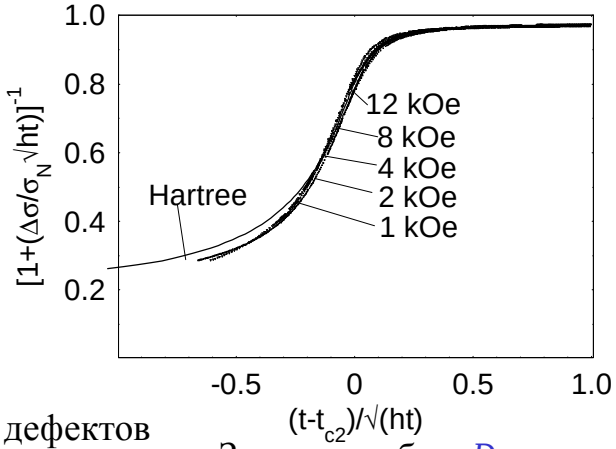
A.V. Nikulov, D.Yu. Remisov, V.A. Oboznov, Absence of the Transition into Abrikosov Vortex State of Two-Dimensional Type-II Superconductor with Weak Pinning. Phys.Rev.Lett. 75, 2586 (1995)



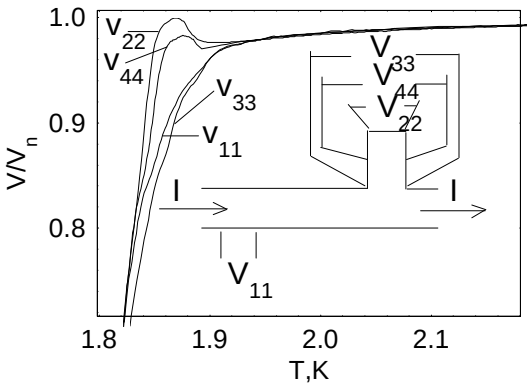
В объемном сверхпроводнике переход в состояние Абрикосова наблюдается при $H_{c4} \approx 0.98\ H_{c2}$. Резкое качественное изменение резистивных свойств.

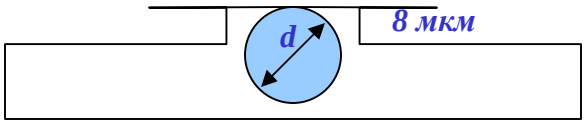


Тонкая пленка с малым количеством дефектов остается в смешанном состоянии без макроскопической фазовой когерентности вплоть до значений магнитного поля в сотни раз меньших H_{c2}: $H_{c4} < 0.01\ H_{c2}$

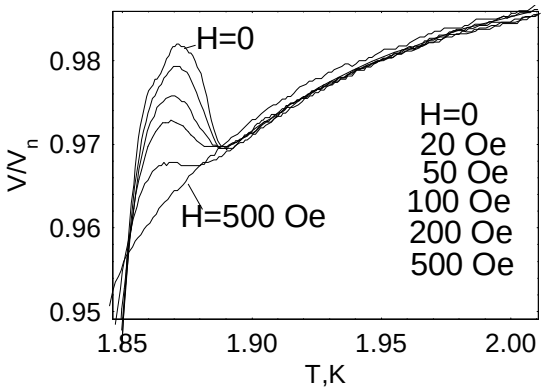


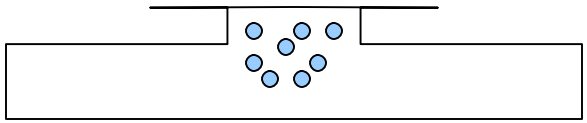
Закон подобия: Ds универсальная функция $e_{2D,H} = (t + h - 1)/Gi_{2D,H}$



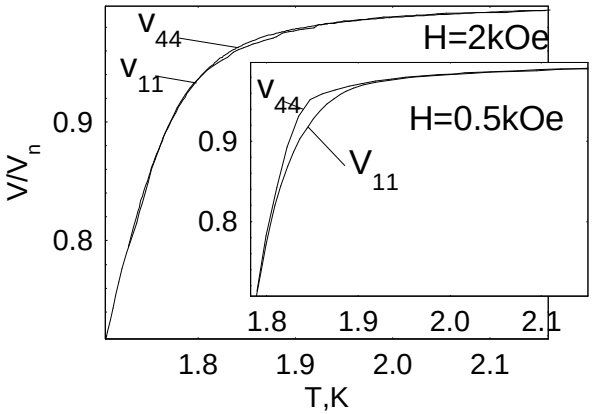


$d \approx x(T) = x(0)(T/T_c - 1)^{-1/2}$





$d \approx (2F_0/pH)^{1/2} \approx (13/H)^{1/2}$ мкм



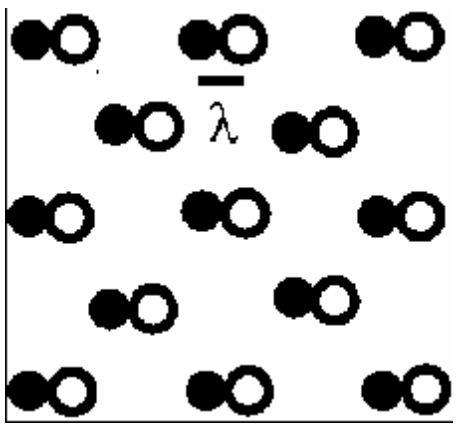
Магнитное поля уменьшает длину фазовой когерентности с $d \approx x(T)$ до $d \approx (2F_0/pH)^{1/2}$.

Ноль-мерность флуктуаций в двумерном сверхпроводнике. ***2D - 2D = 0D***

Решение Абрикосова

Ниже второго критического поля, т.е. при $\frac{T}{T_c}+\frac{H}{H_{c2}(0)}=t+h<1$ энергия $f_{GL}=a_0(\frac{T}{T_c}+\frac{H}{H_{c2}(0)}-1)<|\Psi|^2>+\frac{bb_A}{2}<|\Psi|^2>^2$ минимальна при средней плотности сверхпроводящих пар $n_s=<|\Psi|^2>=\frac{a_0}{bb_A}(1-t-h)$ минимальном значении параметра Абрикосова $b_A=\frac{<|\Psi|^4>}{<|\Psi|^2>^2}$ ***Y(r) = const Þ b_A = 1; Y(r) = å$_l$Y$_l$j$_{n=0,l}$(x,y) Þ b_A > 1***

В сверхпроводнике с площадью ***S,*** перпендикулярной магнитному полю ***B*** полную ортогональную систему нулевого уровня Ландау образуют ***BS/F$_0$*** функций ***j$_{n=0,l}$(x,y).*** Минимальном значении ***b_A » 1.16*** для такой системы соответствует ***Y(r)***, описывающей треугольную вихревую решетку.



Вероятность $P(\Psi)\propto\exp(-\frac{F_{GL}}{k_BT})=\exp[-dS(e_{2D,H}n_s+0.5b_an_s^2)]$ при $b_a>b_A$ меньше чем при $b_a=b_A$ » ***1.16*** $\frac{P(\Psi)}{P(\Psi_\Delta)}=\exp[-dSn_s^2 0.5(b_a-b_A)]$

Для тонкой пленки ***d » 1; S = BS/F$_0$ >> 1; n$_s$ » -e$_{2D,H}$ = (1-t-h)/Gi$_{2D,H}$***

Gert Eilenberger, *Phys. Rev.* **164**, 628–635 (1967)

Каждая из ***BS/F$_0$*** функций ***j$_{n=0,l}$(x,y)*** описывает треугольную решетку.

Y(r) = Y$_l$j$_{n=0,l}$(x,y) Þ b_a = b_A, но b_a > b_A при ***Y(r) = å$_l$Y$_l$j$_{n=0,l}$(x,y)***

K. Maki and H. Takayama, *Prog.Theor.Phys.* **46**, 1651 (1971).

Флуктуационные поправки к решению Абрикосова ***<|Y - Y$_D$|^2 > µ ln(S/x^2)*** для объемного сверхпроводника с площадью ***S***, в то время как для пленки ***<|Y - Y$_D$|^2 > µ S/x^2*** . Различие величин ***ln(S/x^2)*** и ***S/x^2*** в реальных образцах объясняет различие влияния флуктуаций на переход в состояние Абрикосова в объемных сверхпроводниках и пленках: ***S/x^2 » 10^8*** при ***S = 1 мм^2*** и ***x » 10^{-4} мм*** в то время как ***ln(S/x^2) » ln10^8 » 18.***

Теории плавления вихревой решетки.

A.V. Nikulov, The vortex lattice melting theory as example of science fiction. The talk at NATO ARW, Yalta, 1998; Published in the NATO Science Series: Symmetry and Pairing in Superconductors, eds.M.Ausloos and S.Kruchinin, Kluwer Academic Publishers 1999, p.131-140.

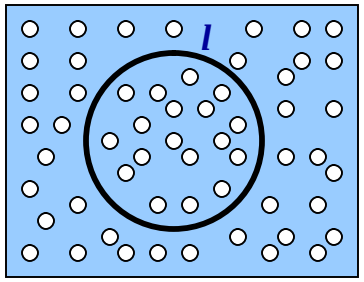
Почему возникло представление о плавлении вихревой решетки?

1. Абрикосов предсказал два дальних порядка в своем состоянии: макроскопическая фазовая когерентность и порядок в расположении вихрей.
2. Большинство обратило внимание на второй дальний порядок и состояние Абрикосова стало восприниматься прежде всего как вихревая решетка.
3. Теории плавления вихревой решетки возникли и стали популярны после открытия высокотемпературных сверхпроводников, когда проблемой стали заниматься много неспециалистов.

Почему теории плавления вихревой решетки являются научной фантастикой?

1. Дальним порядком состояния Абрикосова, как и любого сверхпроводящего состояния является макроскопическая фазовая когерентность и вихри есть сингулярности в смешанном состоянии с фазовой когерентностью.
2. Существование макроскопической фазовой когерентности не зависит от наличия порядка в расположении вихрей.
3. В реальных сверхпроводниках дальний порядок в расположении вихрей отсутствует. А.И. Ларкин, *ЖЭТФ* **58**, 1466-1470 (1970). Наблюдаемый ближний порядок не является спонтанным.
4. Периодическое решение Абрикосова неприменимо как раз для того идеального случая, бесконечного однородного пространства, для которого оно было получено.

Наблюдаемое соответствие между плотностью вихрей и величиной магнитной индукции $nF_0 = F = BS$ доказывает существование макроскопической фазовой когерентности в состоянии Абрикосова.



$$\oint_l dl \nabla j = 2pn$$

Вдоль любого контура *l* и независимо от расположения вихрей внутри контура.