Что такое волновая функция?

В 1913 году Бор постулировал квантование циркуляции импульса электрона на атомной орбите: $2\pi r m_e v = 2\pi r p = nh$.

Согласно соответствию между импульсом частицы и длиной волны $p = h/l$, постулированному Л. де Бройлем в 1924 году, электрон на атомной орбите есть стоячая волна $2\pi r = n l$.

1926 год, волновое уравнение Шредингера.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi = E\Psi$$

Атом

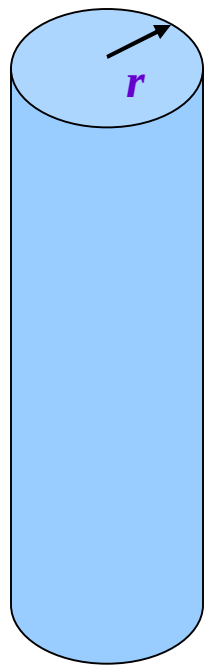
$Y = |Y|\exp(i j)$ в центрально-симметричном поле

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) + \frac{\overleftrightarrow{l}^2}{r^2}\Psi\right] + U(r)\Psi = E\Psi$$

$$\overleftrightarrow{l}^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2 q}\frac{\partial^2}{\partial f^2} + \frac{1}{\sin q}\frac{\partial}{\partial q}\left(\sin q\frac{\partial}{\partial q}\right)\right]$$

$$\Psi = R(r)\mathrm{Y}_{l,m}(q,f) \qquad \overleftrightarrow{l}^2\mathrm{Y}_{l,m} = l(l+1)\mathrm{Y}_{l,m}$$

Квантовые числа: ***n, l, m***



Сверхпроводник

$\Psi = |Y|\exp(i j)$

$|Y|^2 = n_s = const$

$$\oint_l dl\nabla j = 2\pi n = 0$$

$\hbar\tilde{N} j = p = mv + qA;$

$rot\ H = j;\ j = n_s q v;$

$H = H_{r=r0}\exp[(r-r_0)/l_L]$

$r_0 >> l_L$

$(m/n_s q^2)2\pi r j + F =$

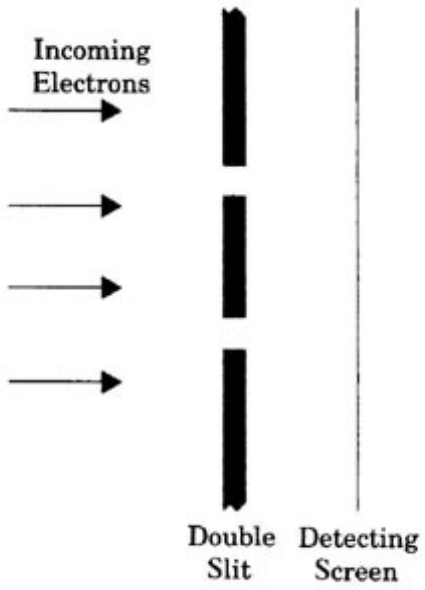
$l_L^2\, 2\pi r\, m_0 j + F = 0;$

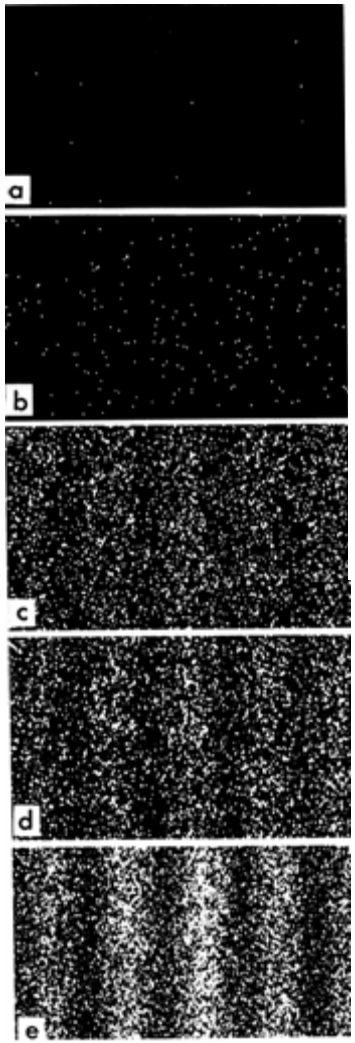
$dH/dr = j;$

$dF/dr = 2\pi r m_0 H$

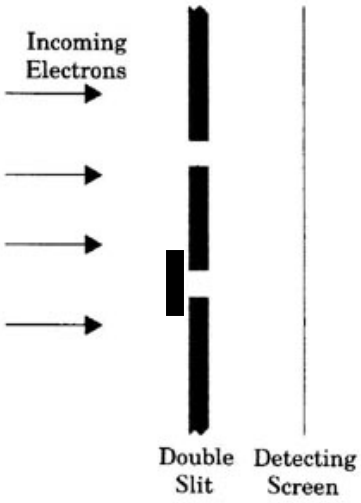
$l_L^2\, d^2H/dr^2 + H = 0$

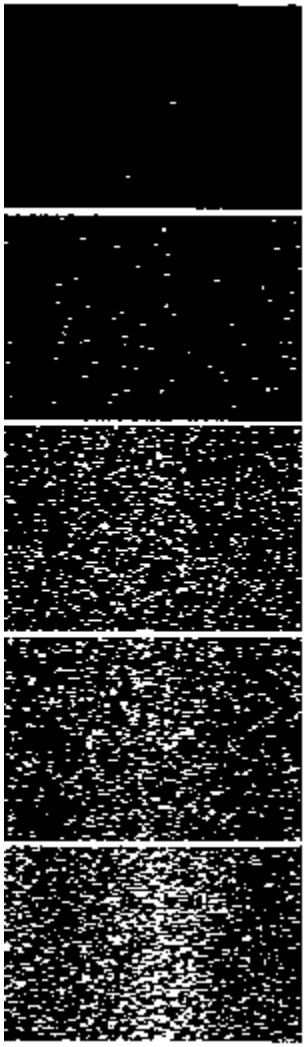
В 1927 году К. Дэвиссон и Л. Джермер впервые наблюдали дифракцию электронов.





Электроны по одному пролетают через двойную щель. Каждая точка обозначает попадание электрона на детектирующий экран. В (a) были зарегистрированы 10 электронов, в (b) 100, в (c) 3000, в (d) 20 000 и в (e) 70 000. Полосчатая структура – отличительный признак интерференции.





Интерференционная картина исчезает если одна из щелей закрыта.

А. Тономура, Ж. Эндо, Т. Матсуда, Т. Кавасаки и Х. Ехава, "Демонстрация интерференционной картины от единичных электронов." *Amer. J. Phys.*, **57**, 117 (1989).

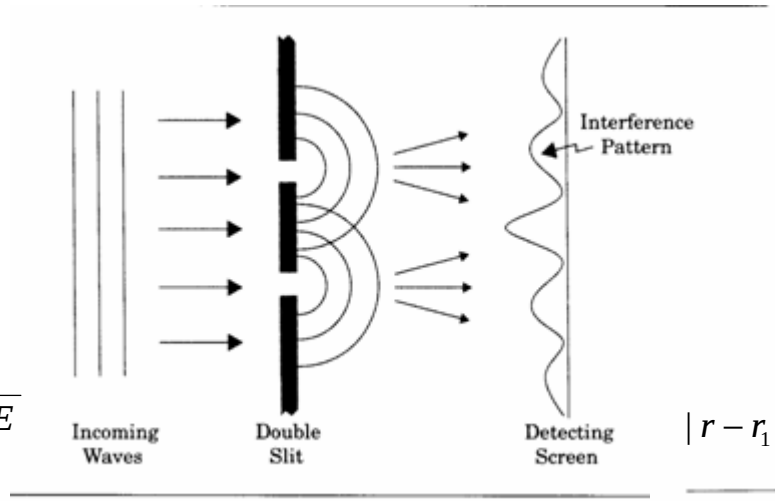
Интерференция

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = i\mathbf{h}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = E\Psi$$

$$\Psi = A\exp\left[i2p\left(\frac{x}{l}-\frac{t}{P}\right)\right]$$

$$\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\left(\frac{2p}{l}\right)^2\Psi = \frac{\mathbf{h}2p}{P}\Psi = E\Psi$$

$$\frac{2p}{P} = \frac{E}{\mathbf{h}} = w \qquad \mathbf{h}\frac{2p}{l} = p = \sqrt{2mE}$$



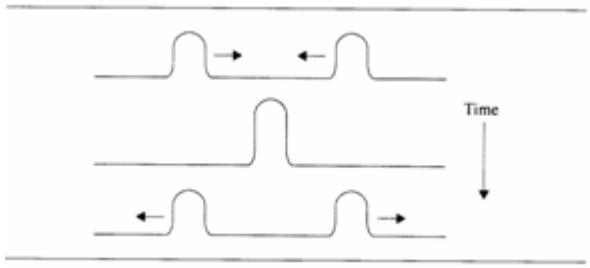
$$\Psi_1 = A_1\exp\left[i2p\left(\frac{|r-r_1|}{l}-\frac{t}{P}\right)\right]$$

$$\Psi_2 = A_2\exp\left[i2p\left(\frac{|r-r_2|}{l}-\frac{t}{P}\right)\right]$$

$$r_1 = 0i_x + 0i_y + li_z \qquad r_2 = 0i_x + 0i_y - li_z$$

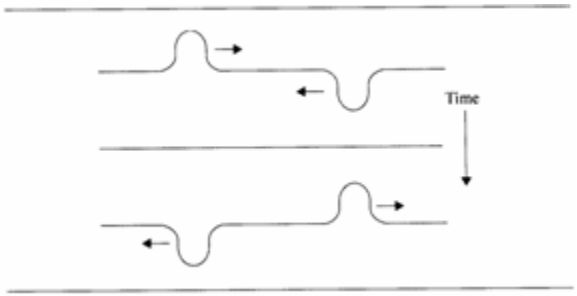
$$r = di_x + 0i_y + zi_z$$

$$|r-r_1| = \sqrt{d^2+(y-l)^2} \qquad |r-r_2| = \sqrt{d^2+(y+l)^2}$$



Конструктивная интерференция.

Борн в 1926 году предложил вероятностную интерпретацию.



Деструктивная интерференция.

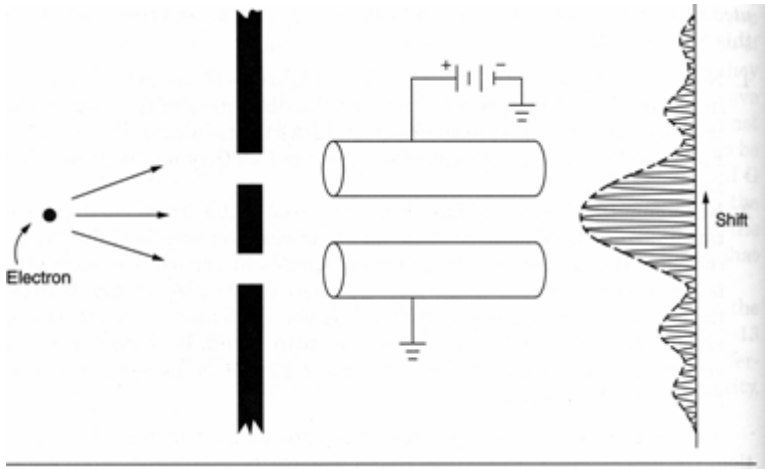
$$\left|\Psi_1+\Psi_2\right|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\left\{e^{i2p\left(\frac{|r-r_1|-|r-r_2|}{l}\right)} + e^{i2p\left(\frac{|r-r_2|-|r-r_1|}{l}\right)}\right\}$$

При ***l*, |*y*| << *d*** $\left|\Psi_1+\Psi_2\right|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\cos 2p\left(\frac{l}{d}\frac{y}{l}\right) = A^2(1-\cos 2p\left(\frac{l}{d}\frac{y}{l}\right))$ $\boldsymbol{P_y = d\,l/l}$

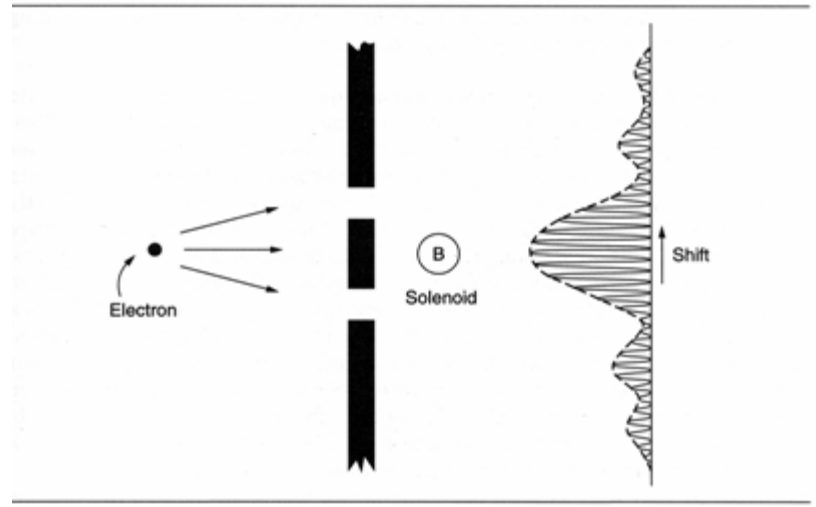
$$\Psi_1 = A_1\exp ij_1 \qquad \Psi_2 = A_2\exp ij_2 \qquad \left|\Psi_1+\Psi_2\right|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\cos(j_1 - j_2) \qquad j = \frac{p}{\mathbf{h}}r - \frac{E}{\mathbf{h}}t$$

Эффект Аронова-Бома.

Y. Aharonov and D. Bohm, "Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory,“ *Phys. Rev.*, 115, 485 (1959).



Проводящие трубы помещены позади каждой щели. Напряжение приложено к одной из них, в то время когда электрон находился внутри трубы. Это смещает картину интерференции на двойной щели, при том, что никакая сила не действовала на электрон.



Небольшой соленоид содержит магнитный поток, который вызывает смещение интерференционной картины, при том, что электрон не проходит через область с магнитным полем B.

$$j(r,t) = j_0 + \int \frac{p}{\mathbf{h}} dr - \int \frac{E}{\mathbf{h}} dt$$

$$\Delta j(V) = \Delta j(0) + \frac{qV}{\mathbf{h}} t$$

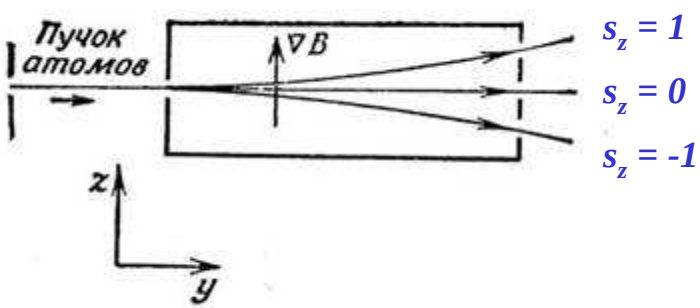
$$\mathbf{h}\frac{\partial j}{\partial t} = E = E_0 + qV \qquad p = \mathbf{h}\nabla j = mv + qA$$

$$\Delta j(\Phi) = \Delta j(0) + \frac{q\Phi}{\mathbf{h}}$$

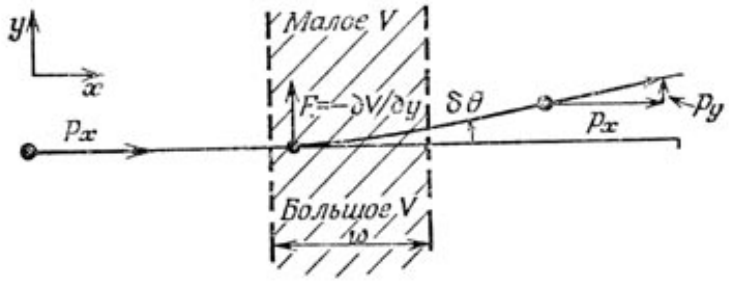
$$\left|\Psi_1 + \Psi_2\right|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta j)$$

Положения максимумом и минимумов в распределении вероятностей меняются местами при $qVt/h = pP_y$ или $qF/h = pP_y$. Здесь есть проблема связанная с тем, что места максимального попадания частиц изменяются при отсутствии какой либо силы.

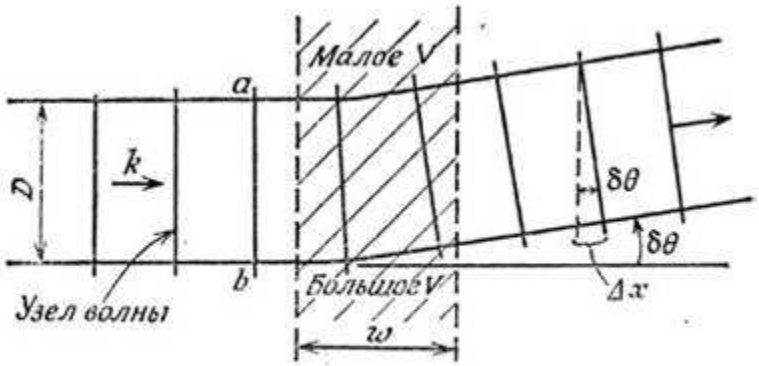
С точки зрения классической физики изменение места попадания электронов на экран связано с изменением его траектории под действием силы.



В опыте Штерна-Герлаха атомы со спином единица расщепляются на три пучка под действием силы $F = -dV/dz = s_z m_B dB/dz$, существование которой связано с градиентом величины магнитного поля dB/dz.



Под действием силы $F = -dV/dy$, действующей в течение времени $t = w/v$, частица, имевшая исходный импульс $p_x = mv$, приобретает дополнительный импульс $p_y = Ft = Fw/v$ и направление ее движения изменяется на угол $dq = p_y/p_x = Fw/p_x v$.



Фиг. 5.8. Амплитуда вероятности в области с поперечным градиентом потенциала.

$$\Psi = A\exp\left[i\left(\frac{p}{\mathbf{h}}x - \frac{E}{\mathbf{h}}t\right)\right]$$

Фейнман описывает отклонение квантовой частицы в поперечном градиенте потенциала, представляя ее движение как волну, длина которой зависит от потенциала. Так полная энергия частицы $E = p^2/2m + V$ не может зависеть от траектории ее движение $E = const_y$, ее кинетическая энергия $p^2/2m = E - V$ и импульс больше $p = [2m(E - V)]^{1/2}$, а длина волны $l = 2ph/p$ меньше, там, где меньше потенциал.

В данном случае отклонение частицы под действием силы может быть согласовано с квантовым описанием. Но в эффекте Аронова-Бома частицы отклоняются при отсутствии силы.

Квантовый потенциал Бома.

D. Bohm, "A suggested interpretation of the quantum theory in terms of 'hidden' variables." *Phys. Rev.*, 85, 166 (1952).

$$i\mathbf{h}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi \qquad \Psi = A\exp\left(i\frac{S}{\mathbf{h}}\right) \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(A\nabla^2 S + 2\nabla A\nabla S\right) \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -\left(\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\mathbf{h}^2}{2m}\frac{\nabla^2 A}{A}\right)$$

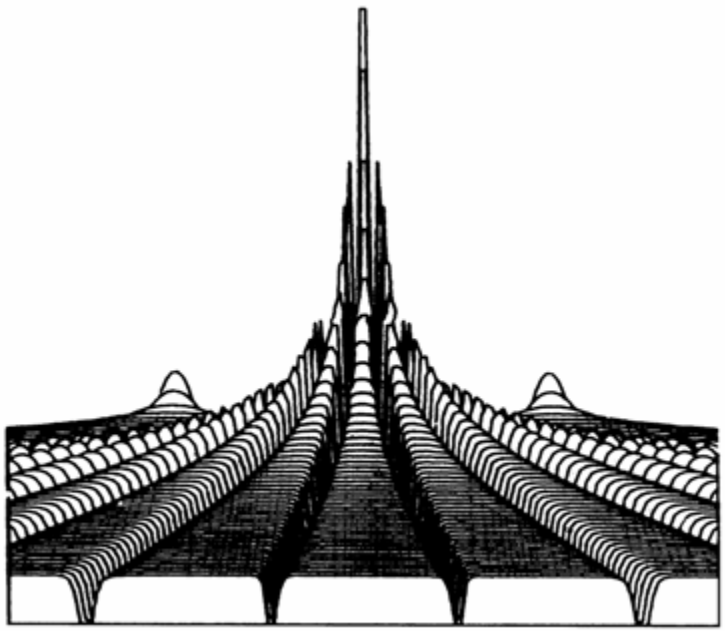
Вероятность $P = A^2$ $\qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\left(P\frac{\nabla S}{m}\right) = 0$ Уравнение непрерывности для вероятность P

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\mathbf{h}^2}{4m}\left(\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right) = 0$$

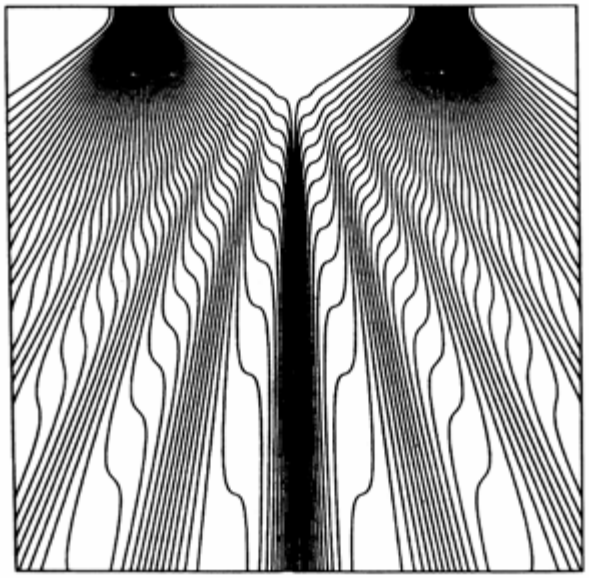
Уравнение Гамилтона-Якоби

$$-\frac{\mathbf{h}^2}{4m}\left(\frac{\nabla^2 P}{P} - \frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right)$$

Квантовый потенциал Бома

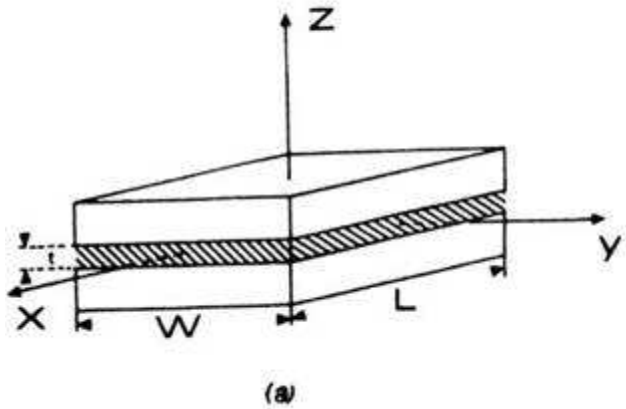


Квантовый потенциал эксперимента по интерференции на двух щелях, согласно теории нелокальных скрытых параметров Бома



Траектории частиц в эксперименте по интерференции на двух щелях, согласно теории нелокальных скрытых параметров Бома

Интерференция и дифракция в сверхпроводниковых структурах

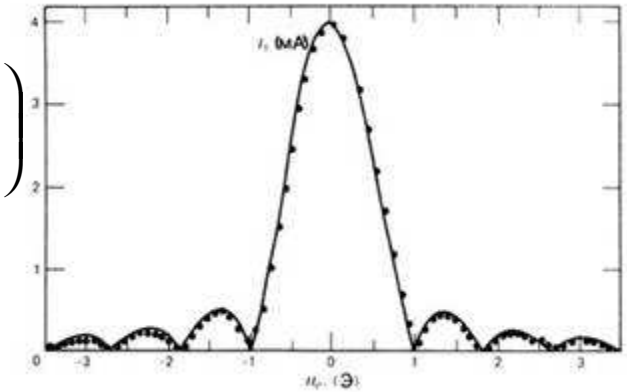


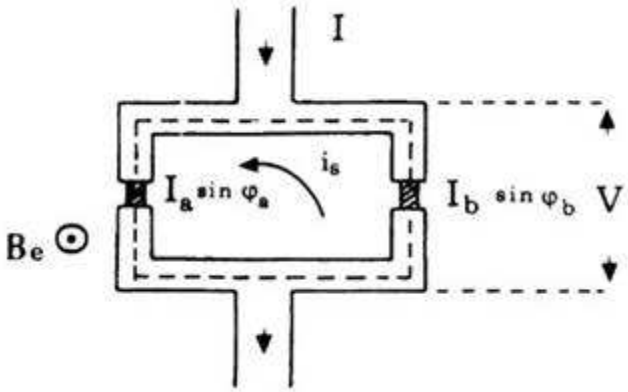
$$j = j_c \sin(j)$$

$$j = j_0 + 2pdH_y x/F_0$$

$$I = w\int_{-L/2}^{L/2} dx j_c \sin\left(j_0 + \frac{2pd}{\Phi_0} H_y x\right)$$

$$I_c = I_{c0}\left|\frac{\sin p\dfrac{\Phi}{\Phi_0}}{p\dfrac{\Phi}{\Phi_0}}\right| \qquad I_{c0} = wLj_c \qquad \Phi = dLH_y$$





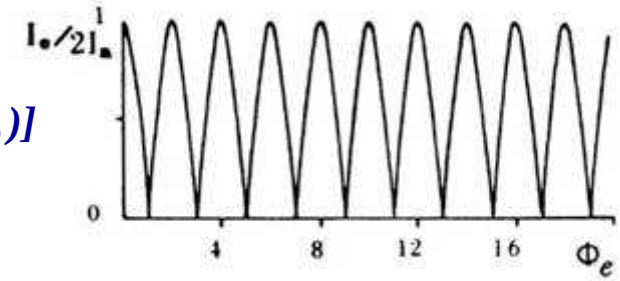
$$I_a = I_{ca} \sin(j_a)$$

$$I_b = I_{cb} \sin(j_b)$$

$$j_a - j_b + 2p\,F/F_0 = 0$$

$$I = I_{ca}\,[\sin(j_a) + \sin(j_a + 2p\,F/F_0)]$$

$$I_c = 2I_{ca}\left|\cos p\frac{\Phi}{\Phi_0}\right|$$



Здесь имеется близкая аналогия с эффектом Аронова-Бома:

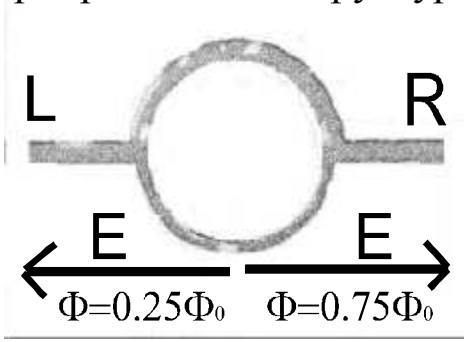
$$|\Psi_1 + \Psi_2|^2 = A^2 2\left(1 + \cos\left[2p\frac{\Phi}{\Phi_0}\right]\right) = A^2\left|\cos\left(2p\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)\right|^2$$

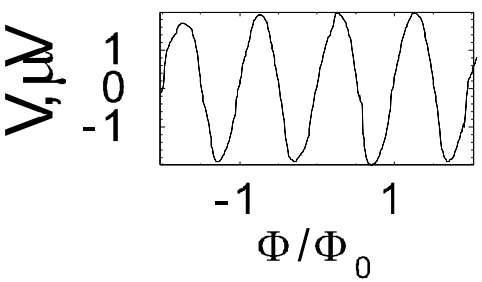
Различия между физикой сверхпроводящего состояния и атомной физикой.

В экспериментах по интерференции элементарных частиц $|Y|^2$ описывает вероятность.

В сверхпроводнике $|Y|^2$ есть плотность сверхпроводящих пар.

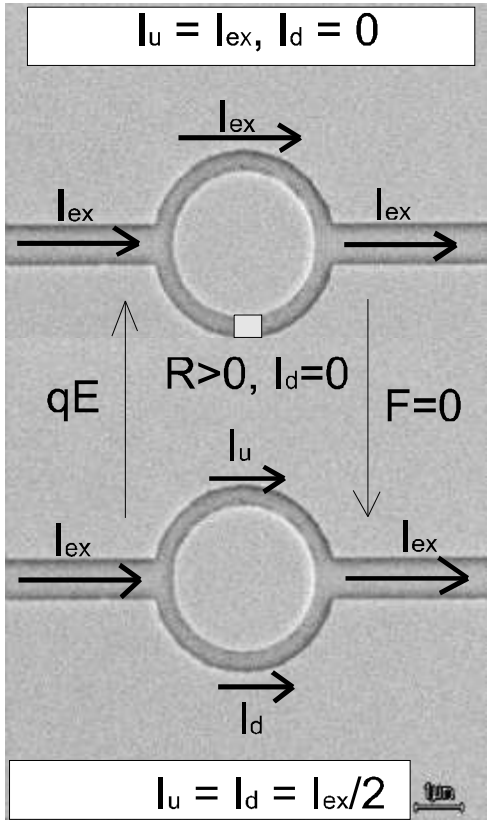
Не имеет смысла говорить о направлении скорости электрона на атомной орбите.
Квантование Бора не нарушает симметрии между противоположными направлениями на атомном уровне, но мы можем видеть, что это происходит в сверхпроводящих структурах.





Направление электрического поля $E = -\tilde{N}V$ изменяется с величиной магнитного потока F/F_0.

Важно понимать принципиальные различия между тем, что мы можем сделать на уровне элементарных частиц и в сверхпроводящих структурах.
Мы не можем создать асимметрию пространства в котором движутся элементарные частицы, но мы можем сделать асимметричное сверхпроводящее кольцо.
Мы не можем устроить переключение между состояниями с различной связностью волновой функции на атомной орбите, но мы можем это сделать в сверхпроводящем кольце.
Квантовая трансформация импульса.
H. M. Wiseman et al., Nonlocal momentum transfer in welcher Weg measurements. Phys. Rev. A 56, 55 - 75 (1997)



Когда волновая функция (сверхпроводящее состояние) разомкнуто, ток течет только по верхней половинке кольца. При замыкании состояния ток должен перераспределиться вследствие условия квантования:

$$\oint_l dlv = \frac{2p\mathbf{h}}{m}\left(n - \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = 0$$