Основные идеи микроскопической теории сверхпроводимости.

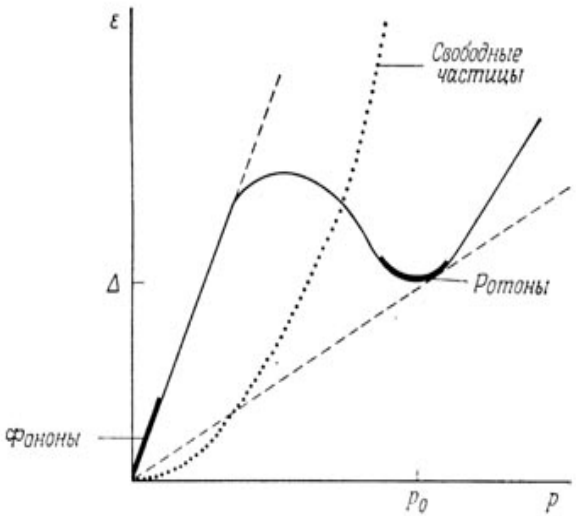
Микроскопическая теории сверхпроводимости была создана в 1957 году, через 46 лет после открытия этого квантового явления.

J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer Phys. Rev. 108, 1175 (1957);

Н.Н. Боголюбов, ЖЭТФ 43, 58 (1958); Н.Н. Боголюбов, В.В. Толмачев, Д.В. Ширков, Новый метод в теории сверхпроводимости. М. Наука, 1958

П.Л. Капица, ДАН СССР 18, 21; Nature 141, 74 (1938) -открытие сверхтекучести жидкого гелия.

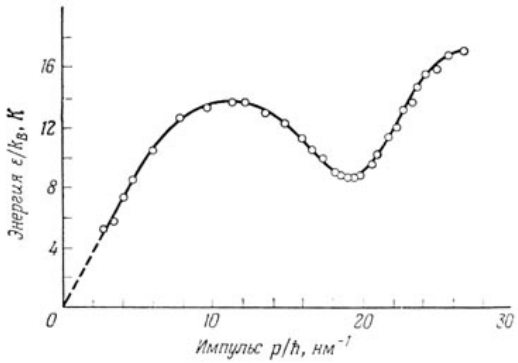
L.D. Landau, J. Phys. (USSR) 5, 71 (1941); 11, 91 (1947) – теория сверхтекучести.



Фононно-ротонный спектр, предложенный Ландау в 1947 году.

1) Диссипация происходит через образование квазичастиц.
2) Отсутствие диссипации при движении сверхтекучего гелия может быть объяснено наличием щели в зависимости энергии ε от импульса ***p*** квазичастиц. Диссипация может иметь место если при движении гелия со скоростью возникновение квазичастиц приводит к уменьшению $e(p) - pv < 0$.

Ландау предположил, что в энергетическом спектре квазичастиц сверхтекучего гелия имеется щель и образование квазичастиц становится энергетически выходным только при критической скорости гелия: $v > v_c = \min[e(p)/p]$.

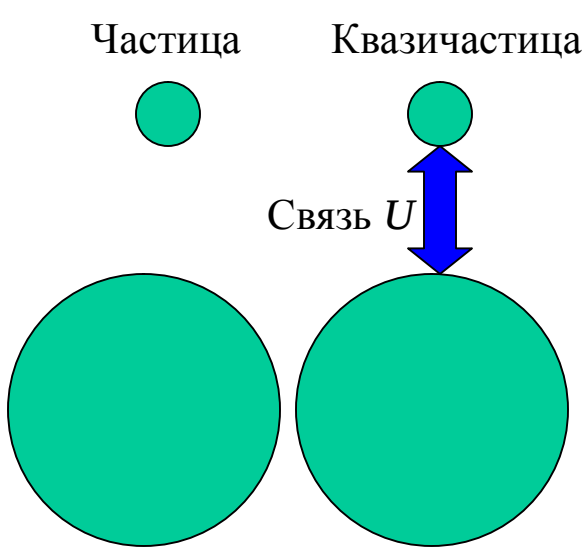


Спектр возбуждений полученный в экспериментах по рассеянию нейтронов в 1961 году.

Конденсация Бозе- Эйнштейна.

Спектр предложенный Ландау предполагает, что атомы гелия перестают быть квазичастицами, т.е. их импульс и энергия не могут изменяться индивидуально. Это возможно, когда они образуют конденсат Бозе-Эйнштейна.
Главная сложность в объяснении сверхпроводимости связана с тем, что электроны являются фермионами, которые не могут сами по себе образовывать бозе-конденсат. Самым естественным выходом из этой ситуации является предположение об образовании пар электронами, которые должны быть бозе-частицами. Долго не удавалось понять почему электроны могут образовывать пары, так как они должны отталкиваться согласно закону Кулона.
В 1950 году был открыт изотопический эффект - зависимость критической температуры T_c от изотопического состава сверхпроводника, E. Maxwell, Phys.Rev., 78, 477 (1950); C.A. Reynolds et al., Phys.Rev., 78, 487 (1950). Это означало, что T_c зависит от массы M атомов $T_c \mu M^{-1/2}$, т.е. сверхпроводимость связана каким то образом с колебаниями решетки.
В том же году Фрелих и Бардин показали, электроны в кристаллической решетке могут притягиваться, H. Frohloch, Phys.Rev., 79, 845 (1950); J. Bardin, Phys.Rev., 79, 167 (1950); 80, 567 (1950); 81, 1070 (1951); 82, 987 (1950).
Через шесть лет Купер нашел механизм спаривания L.N. Cooper, Phys.Rev., 104, 1189 (1956).
В следующем году была опубликована теория сверхпроводимости Бардина-Купера-Шрифера (БКШ) J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Theory of Superconductivity, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).

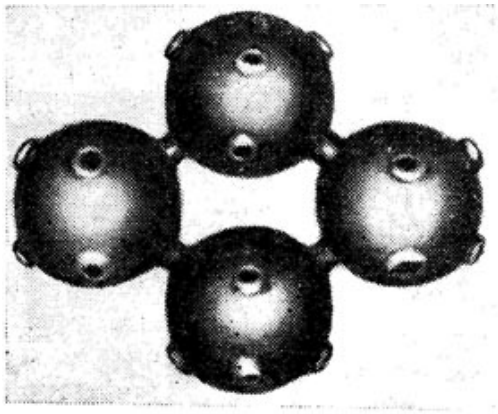
Квазичастицы и теория возмущений.



$$-\frac{\mathbf{h}^2}{2m}\nabla^2\Psi + U\Psi = E\Psi$$

Решения данного уравнение можно рассматривать как описание квазичастиц. Электроны в кристаллической решетке заполняют уровни с меньшей энергией до поверхности Ферми.

Поверхность Ферми



Энергия квазичастиц вблизи поверхности Ферми: $e_e = |e(p) - m| \approx v_F(p - p_F)$ для «электрона» $e_h = |e(p) - m| \approx v_F(p_F - p)$ для «дырке».

В теории БКШ рассматривается взаимодействие электронов через фононы, которое может быть описано с помощью теории возмущений.

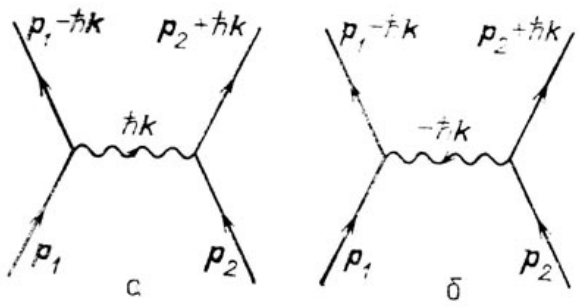
$$\hat{H}\Psi = (\hat{H}_0 + V)\Psi = E\Psi$$

$$\Psi = \sum_p c_p \Psi_p^0$$

$$\hat{H}_0\Psi = \sum_p c_p \hat{H}_0 \Psi_p^0 = \sum_p c_p E_p \Psi_p^0$$

$$\sum_p c_p (E_p^0 + \hat{V})\Psi_p^0 = \sum_p c_p E \Psi_p^0$$

$$(E - E_{p1}^0)c_{p1} = \sum_{p2} V_{p1,p2,} c_{p2}$$



$$E = E^{(0)} + E^{(1)} + E^{(2)} + \ldots \qquad c_p = c_p^0 + c_p^1 + c_p^2 + \ldots$$

$$\frac{|V_{p-\mathbf{h}k,p}|^2}{e(p_1) - e(p_1 - \mathbf{h}k) - \mathbf{h}w(k)}$$

$$\frac{|V_k|^2}{e(p_2) - e(p_2 - \mathbf{h}k) - \mathbf{h}w(k)}$$

$$e(p_1) + e(p_2) = e(p_1 - \mathbf{h}k) + e(p_1 + \mathbf{h}k)$$

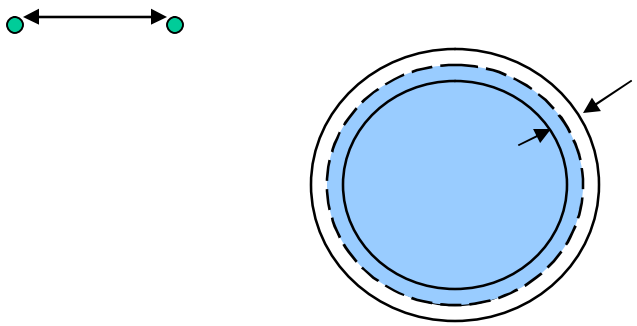
$$U_{p,p'} = -\frac{2|V_k|^2\,\mathbf{h}w(k)}{[\mathbf{h}w(k)]^2 - [e(p_1) - e(p_1 - \mathbf{h}k)]^2}$$

Куперовское спаривание

$$[\hat{H}_0(r_1)+\hat{H}_0(r_2)+U(r_1,r_2)]\Psi(r_1,r_2)=E\Psi(r_1,r_2)$$

$$\Psi(r_1,r_2)=\sum_p c_p \Psi_{p,+}(r_1)\Psi_{-p,-}(r_2)$$

$$2\,|\,e_{\pm e}\,|\,c_p+\sum_p U_{p,p'}c_{p'}=Ec_p$$



$$U_{p,p'}=-g$$

$$p_0-\frac{\hbar w_D}{v}<|\,p\,|<p_0+\frac{\hbar w_D}{v}$$

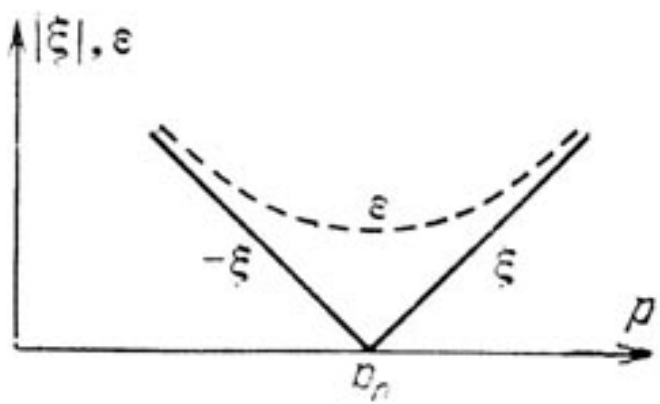
$$c_p=\frac{gI}{2\,|\,e_{\pm e}(p)\,|-E}$$

$$I=\sum c_p$$

$$E=-2\Delta$$

$$I=\frac{gI}{2}\sum\frac{1}{|\,e_{\pm e}(p)\,|+\Delta}$$

$$1=\frac{gN_m}{2}\ln\left(\frac{\hbar w_D}{\Delta}\right)$$



Учет взаимодействия квазичастиц через виртуальные фотоны приводит к притяжению между ними и в энергетическом спектре появляется щель.

$$\Delta=\hbar w_D\exp\left(-\frac{2}{gN_m}\right)$$

Вторичное квантование

$$\hat{H} = \sum_p e_{\pm e}(p) a^+_{p,s} a_{p,s} - g \sum_p a^+_{p1,+}{}' a^+_{p2,-}{}' a_{p2,-} a_{p1,+}$$

a_p- оператор рождения;

a_p^+ - оператор уничтожения

С помощью преобразования Боголюбова гамильтониан может быть преобразован:

$$a_{p,+} = u_p a_{p,+} + v_p a^+_{-p,-} \quad a_{p,-} = u_p a_{p,-} - v_p a^+_{-p,+} \quad u_p^2 + v_p^2 = 1 \quad < a^+_{p,-} a_{p,-} >= n_- \quad < a^+_{p,+} a_{p,+} >= n_{p,+}$$

$$E =< \hat{H} >= \sum_p e_{\pm e}(p)[u_p^2(n_{p,+} + n_{p,-}) + v_p^2(2 - n_{p,+} - n_{p,-})] - g \sum_p u_p v_p (1 - n_{p,+} - n_{p,-}) \sum_{p'} u_{p'} v_{p'} (1 - n_{p',+} - n_{p',-})$$

$$\Delta = g \sum_p u_p v_p (1 - n_{p,+} - n_{p,-}) \qquad E = \sum_p e_{\pm e}(p)[(n_{p,+} + n_{p,-}) + 2v_p^2(1 - n_{p,+} - n_{p,-})] - \Delta \sum_p u_p v_p (1 - n_{p,+} - n_{p,-})$$

$$2e_{\pm e} = \Delta \frac{1 - 2v_p^2}{u_p v_p} \qquad e(p) = [e^2_{\pm e}(p) + \Delta^2]^{1/2} \qquad u_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{e_{\pm e}(p)}{e(p)}\right) \qquad v_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e_{\pm e}(p)}{e(p)}\right)$$

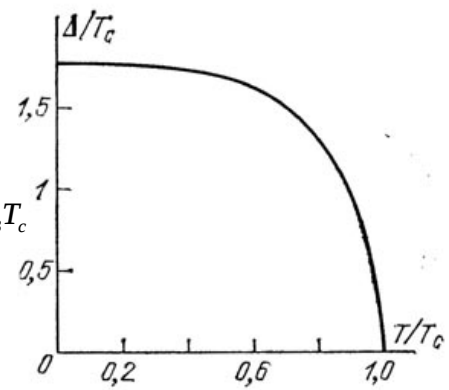
$$\Delta = 0.5 g \sum_p \frac{\Delta}{e(p)} (1 - n_{p,+} - n_{p,-}) \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{g}{2} \sum_p \frac{1 - 2n_p}{e(p)} = \frac{g}{2} \int \frac{d^3 p}{(2p\hbar)^3} \frac{1 - 2n_F(e)}{e} \qquad n_F = \frac{1}{\exp\left(\frac{e}{k_B T}\right) + 1}$$

$$1 = \frac{gN_m}{2} \int_0^{\hbar w_D} de_{\pm e} \frac{th\left[\frac{(e^2_{\pm e} + \Delta^2)^{1/2}}{k_B T}\right]}{(e^2_{\pm e} + \Delta^2)^{1/2}}$$

При $T \to 0$ $th \to 1$

$$1 = \frac{gN_m}{2} \ln\left(\frac{2\hbar w_D}{\Delta}\right) \qquad \Delta = 2\hbar w_D \exp\left(-\frac{2}{gN_m}\right)$$

При $T \to T_c$; $\Delta \to 0$

$$\Delta(0) = \frac{p}{g} k_B T_c \approx 1.76 k_B T_c$$

$$1 = \frac{gN_m}{2} \int_0^{\hbar w_D} de_{\pm e} \frac{th\left[\frac{e_{\pm e}}{k_B T}\right]}{e_{\pm e}} = \frac{gN_m}{2} \ln\left(\frac{2\hbar w_D g}{p T_c}\right) T_c = \frac{2\hbar w_D g}{p k_B} \exp\left(-\frac{2}{gN_m}\right)$$