

Дробный квантовый эффект Холла. Часть I

1. Эксперимент.
2. Жидкость Лафлина.
3. Дробный заряд квазичастицы.
4. Иерархия дробных состояний.

Эксперимент

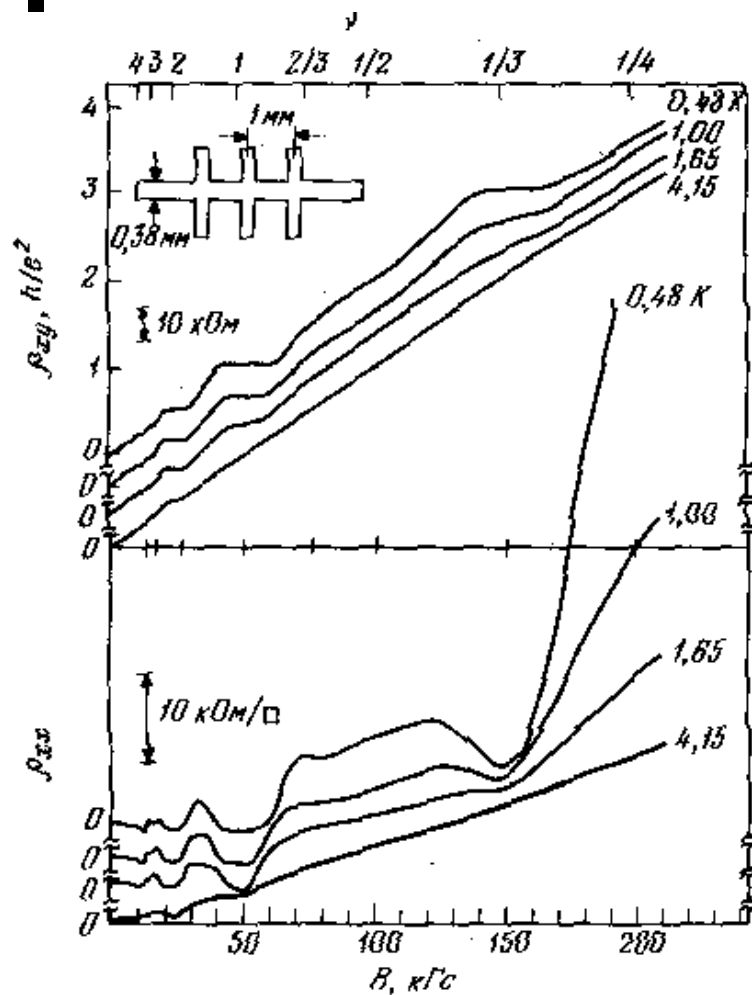


Рис. 6.1. Дробный квантовый эффект Холла при степени заполнения нижнего уровня Ландау $\nu = 1/3$ в том виде, в котором его открыли Цуи, Штёрмер и Госсард [391].

Цилиндрическая калибровка

$$\mathcal{H} = \sum_j \left[\frac{1}{2m_e} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla_j + \frac{e}{c} \mathbf{A}_j \right)^2 + V(\mathbf{r}_j) \right] + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}$$

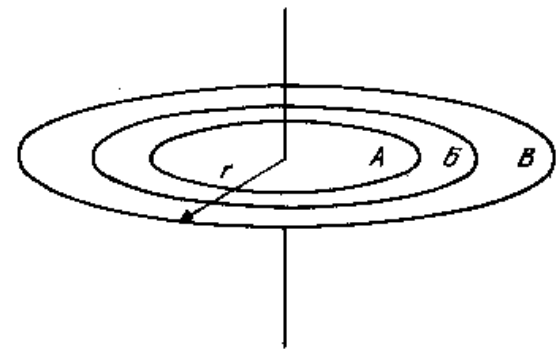
$$V(\mathbf{r}) = -e\phi = -e_0 \int_{\text{Образец}} \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2 r' \quad \mathbf{A} = (1/2)\mathbf{B}(y\hat{x} - x\hat{y})$$

В отсутствии потенциала спектр – уровни Ландау

$$\mathcal{H}_{\text{SB}} = \frac{1}{2m_e} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2$$

$$\psi_{m,n}(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{4}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)^n e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$\mathcal{H}_{\text{SB}} \psi_{m,n} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \psi_{m,n}$$



Вариационный метод

В теории Лафлина рассмотрен ультраквантовый случай $n = m = 0$.
При этом Лафлин предложил отказаться от детерминанта Слэтера, поскольку ролью кинетической энергии можно пренебречь.

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{j < k}^N f(z_j - z_k) \exp\left(-\frac{1}{4} \sum_{\ell}^N |z_{\ell}|^2\right)$$

Из соображений принципа Паули и симметрии задачи.

$$f(z) = z^m \quad \text{где } m - \text{нечетное целое число}$$

$$|m\rangle = \Psi_m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{j < k}^N (z_j - z_k)^m \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_{\ell}^N |z_{\ell}|^2\right\}$$

Эквивалентная плазма Лафлина

$$\langle mV|m \rangle = \frac{e^2}{m^2} \iiint_{z_i} \sum_{j \neq k}^N \frac{m^2}{|r_j - r_k|} |\Psi_m(z_1, \dots, z_N)|^2 - r_0 \int \frac{m^2}{|r - r'|} d^2 r' |\Psi_m(z_1, \dots, z_N)|^2 dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N = \min$$

$$|\Psi_m(z_1, \dots, z_N)|^2 = e^{-\beta\phi(z_1, \dots, z_N)}, \quad b = 1/m \quad m - \text{эффективная температура}$$

$$\phi(z_1, \dots, z_N) = -2m^2 \sum_{j < k} \ln|z_j - z_k| + \frac{m}{2} \sum_{\ell}^N |z_{\ell}|^2 \quad - \text{потенциал классической двумерной плазмы с единичным зарядом } m$$

Энергия плазмы минимальна при постоянной плотности $\rho_p = mN/S = 1/(2\pi l^2)$.

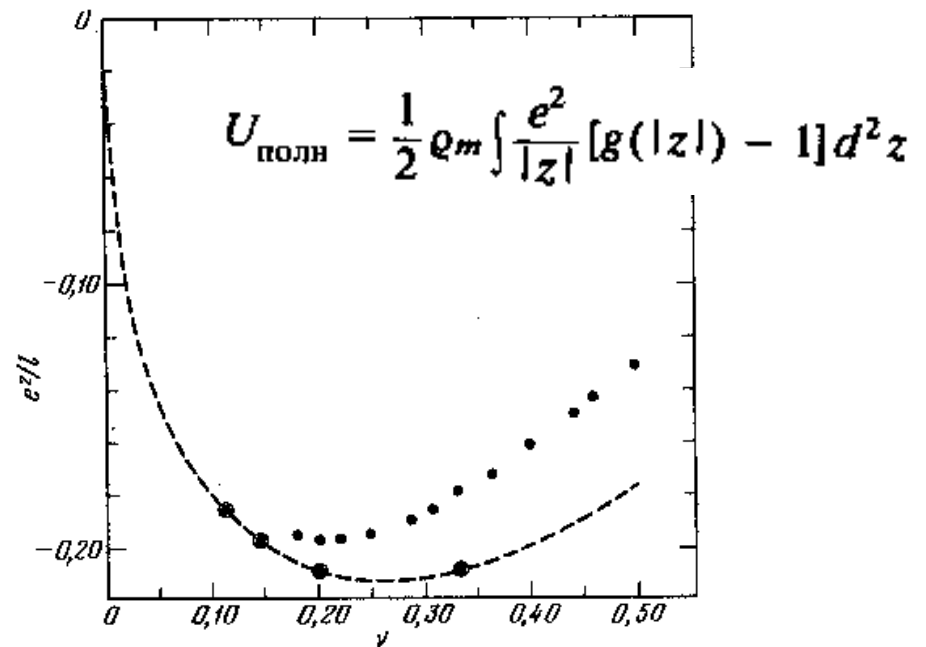
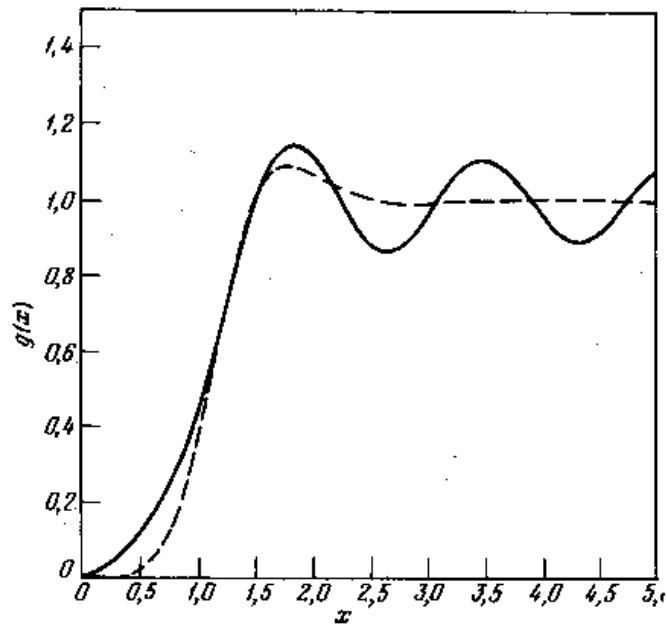
$$e(z_1) = \frac{N}{\langle m|m \rangle} \int \dots \int |\Psi_m(z_1, \dots, z_N)|^2 d^2 z_2 \dots d^2 z_N = \rho_p e/m$$

$$N/S = 1/(m2\pi l^2) = n_c/m \Rightarrow \boxed{n = 1/m}$$

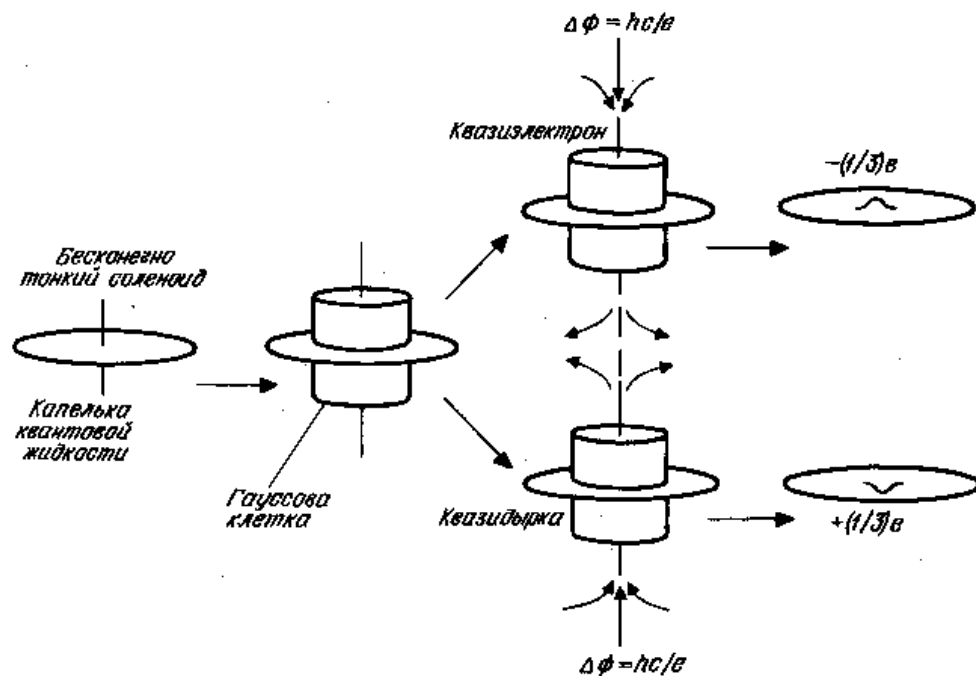
Жидкость Лафлина

Жидкое или твердое состояние имеет плазма можно определить по отношению потенциальной энергии к температуре $\Gamma = 2m$. Если $\Gamma < 140$, то плазма – жидкость.

$$g(|z_1 - z_2|) = \frac{N(N-1)}{Q_m^2 \langle m|m \rangle} \int \dots \int |\Psi_m(z_1, \dots, z_N)|^2 d^2 z_3 \dots d^2 z_N$$



Дробный заряд квазичастицы



$$(re^{ix})^k e^{-r^2/4} \rightarrow r^{|k + \phi/\phi_0|} e^{ikx} e^{-(r^2/4)}$$

$$z^k e^{-\frac{1}{4}|z|^2} \rightarrow z^{k+1} e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

$$|S_{z_0} \Psi_m(z_1, \dots, z_N)|^2 = e^{-\beta\phi'}$$

$$\phi' = -2m^2 \sum_{j>k}^N \ln|z_j - z_k| + \frac{m}{2} \sum_l^N |z_l|^2 - 2m \sum_i^N \ln|z_i - z_0|$$

Точность ДКЭХ

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|}$$

Уменьшение образца неизбежно ведет к уменьшению расстояния между частицами и увеличению их взаимодействия. Таким образом, при малых размерах эта энергия может сравняться с расстоянием между уровнями Ландау. В этом случае пробную волновую функцию необходимо строить с учетом волновых функций вышележащих уровней Ландау.

$$\Psi(z_1, z_2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |z_1 - z_2|^n \right) (z_1 - z_2)^m \exp \left[-\frac{1}{4} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right]$$

$$|\Psi(z_1, \dots, z_N)|^2 = \exp[-\beta(\phi + \gamma)]$$

γ – многоцентровый потенциал, который экранируется эквивалентной плазмой. Если размеры образца больше длины экранирования ДКЭХ выполняется.

Дробное преобразование

Теория Лафлина хорошо описывает состояния $\nu = 1/m$. Однако в эксперименте наблюдаются состояния $\nu = p/m$, $p = 2, 3$ и т. д. Для описания этих состояний можно рассмотреть взаимодействие квазичастиц, приблизительно тем же способом.

$$\psi(\eta_1, \dots, \eta_M) = \prod_{j < k}^M (\eta_j - \bar{\eta}_k)^\alpha F(\eta_1, \dots, \eta_M) \exp\left(-\frac{1}{4m} \sum_l^M |\eta_l|^2\right)$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{(2\pi m)^M} \int \dots \int \psi^*(\eta_1, \dots, \eta_M) \prod_{j < k}^M (\eta_j - \eta_k)^\alpha \prod_i^M S_{\eta_i} |m\rangle \times$$

$$a = \frac{1}{k} \quad \times \exp\left(-\frac{1}{4m} \sum_l^M |\eta_l|^2\right) d^2 \eta_1 \dots d^2 \eta_M$$

Иерархия дробных состояний

$$\left[\sum_j^M \frac{1}{2m_e} \left(\hbar \nabla_j - \frac{e^*}{c} \mathbf{A}_j \right)^2 + V(\eta_1, \dots, \eta_M) \right] \psi(\eta_1, \dots, \eta_M) = E \mathcal{O}(\eta_1, \dots, \eta_M) \psi(\eta_1, \dots, \eta_M)$$

$$V(\eta_1, \dots, \eta_M) \equiv \mathcal{O}(\eta_1, \dots, \eta_M) \sum_{j < k}^M \frac{(e^*)^2}{|\eta_j - \eta_k|}$$

$$n = \frac{1}{m + \frac{1}{k}}$$