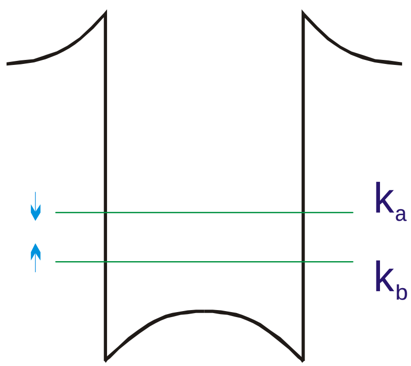
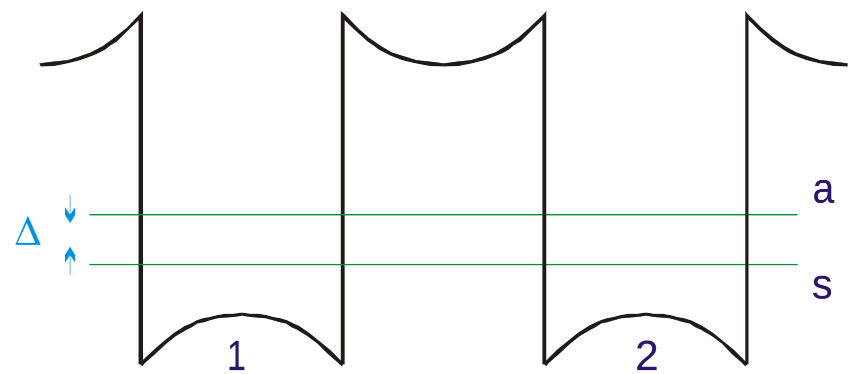
Многокомпонентный квантовый эффект Холла I.

1. Псевдоспин.
2. Многокомпонентные волновые функции.
3. Метод наклонных магнитных полей.
4. Скирмионы.

Двухкомпонентные системы

Спиновое и долинное симметрично-асимметричное расщепления





Спин

$$\Psi(r) = \boxed{s_z f(z)} \exp[i(k_x x + k_y y)]$$

Долина

$$\Psi(r) = \boxed{s_z f_{a,b}(z) \exp[ik_{a,b} z]} \exp[i(k_x x + k_y y)]$$

Дублет

$$\Psi(r) = \boxed{s_z f_{1,2}(z)} \exp[i(k_x x + k_y y)]$$

Псевдоспин

$$\Psi(r) = \boxed{\tilde{s}_i(z)} \exp[i(k_x x + k_y y)]$$

Условие двухкомпонентного квантового эффекта Холла

$$\boxed{\Delta \le \frac{e^2}{\mathbf{l}_c}}$$

Двухкомпонентная волновая функция

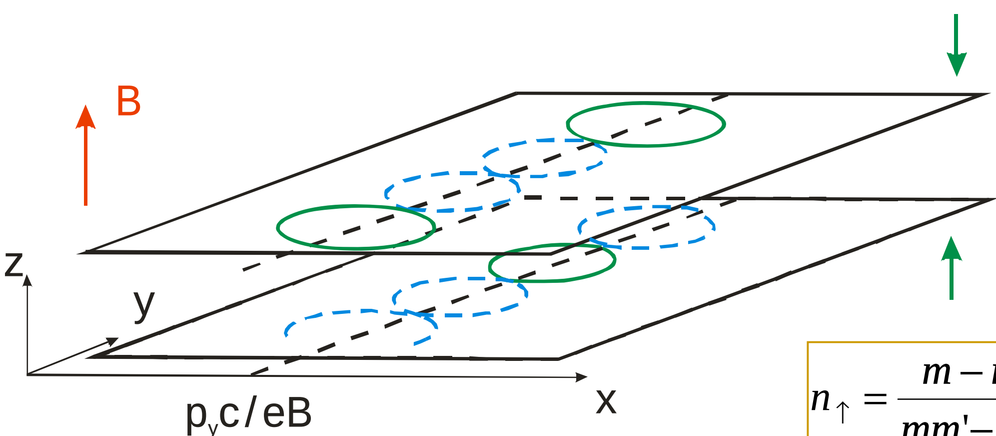
Функция Лафлина $\psi_m(Z_1,Z_2,\dots,Z_N)=\prod_{i<j}^{N}(Z_i-Z_j)^m\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k}^{N}|Z_k|^2\right)$ $Z=(x+iy)/l$ $l=\sqrt{\hbar c/eB}$

По аналогии с функцией Лафлина, Гальперин предложил двухкомпонентную волновую функцию в виде:

$$\Psi[Z:\chi]=A[\Phi[Z]\alpha_1\cdots\alpha_{N_\uparrow}\beta_{[1]}\cdots\beta_{[N_\downarrow]}]$$

где A – антисимметризующий оператор, α_k , β_k – ↑ и ↓ спиноры , [i] = $N_\uparrow$ + i. При этом координатная часть волновой функции имеет вид:

$$\Phi_{m,m',n}[Z]=\prod_{i<j\le N_\uparrow}(Z_i-Z_j)^m\prod_{k<l\le N_\downarrow}(Z_{[k]}-Z_{[l]})^{m'}\prod_{a=1}^{N_\uparrow}\prod_{b=1}^{N_\downarrow}(Z_a-Z_{[b]})^n\prod_{s=1}^{N}\exp\left(\frac{-|Z_s|^2}{4}\right)$$



Подобно функции Лафлина, данная функция приводит к несжимаемому состоянию в следующей ситуации:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi=BS=mN_\uparrow\Phi_0+nN_\downarrow\Phi_0\\ \Phi=BS=m'N_\downarrow\Phi_0+nN_\uparrow\Phi_0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}1=mn_\uparrow+nn_\downarrow\\ 1=m'n_\downarrow+nn_\uparrow\end{array}\right\}$$

$$\boxed{n_\uparrow=\frac{m-n}{mm'-n^2}}\quad\boxed{n_\downarrow=\frac{m'-n}{mm'-n^2}}\quad\boxed{n=n_\uparrow+n_\downarrow=\frac{m+m'-2n}{mm'-n^2}}$$

Факторы заполнения и поляризация

TABLE 5.1. Generalized Laughlin States for Two-Component Systems[a]

m	m'	n	$\nu_\uparrow$	$\nu_\downarrow$	ν	S
1	1	0	1	1	2	0
1	1	1	(1/2)	(1/2)	1	$N/2$
1	3	0	1	1/3	4/3	$N/4$
1	5	0	1	1/5	6/5	$N/3$
3	3	0	1/3	1/3	2/3	*
3	3	1	1/4	1/4	1/2	*
3	3	2	1/5	1/5	2/5	0
3	3	3	(1/6)	(1/6)	1/3	$N/2$
3	5	0	1/3	1/5	8/15	*
3	5	1	2/7	1/7	3/7	*
3	5	2	3/11	1/11	4/11	$N/4$
5	5	0	1/5	1/5	2/5	*
5	5	1	1/6	1/6	1/3	*
5	5	2	1/7	1/7	2/7	*
5	5	3	1/8	1/8	1/4	*
5	5	4	1/9	1/9	2/9	0
5	5	5	(1/10)	(1/10)	1/5	$N/2$

Source: After Ref. [22].

[a] S is the total spin quantum and * denotes a state that is not an eigenstate of S_T^2. The nominal filling factors $\nu_\uparrow$ and $\nu_\downarrow$ are shown in parentheses for the ferromagnetic $\{m, m, m\}$ states because these are not unique (only their sum ν is fixed).

$$2S_z = N_\uparrow - N_\downarrow \Rightarrow S_z = \frac{N}{n}\left(n_\uparrow - n_\downarrow\right)$$

Анизотропия массы

$$[T-e\phi(z)-E]\psi=0$$

$$T=\tfrac{1}{2}\sum_{i,j}w_{ij}p_ip_j \qquad p_j=-i\hbar(\partial/\partial x_j)$$

$$\psi(x,y,z)=\xi(z)\exp(ik_1x+ik_2y)$$

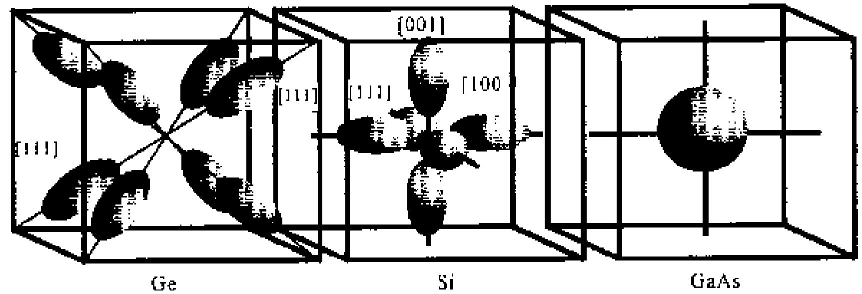


Рис. 4.13. Форма и расположение изоэнергетических поверхностей в Ge, Si, GaAs [16]

$$-\tfrac{1}{2}w_{33}\hbar^2(d^2\xi/dz^2)-\hbar^2(w_{13}k_1+w_{23}k_2)(d\xi/dz)-[e\phi(z)+E']\xi(z)=0$$

$$E=E'+\tfrac{1}{2}\hbar^2(w_{11}k_1^2+2w_{12}k_1k_2+w_{22}k_2^2)$$

$$\xi(z)=\zeta(z)\exp[-iz(w_{13}k_1+w_{23}k_2)/w_{33}]$$

$$d^2\zeta_i/dz^2+(2m_3/\hbar^2)[E_i''+e\phi(z)]\zeta_i(z)=0 \qquad m_3=w_{33}^{-1}$$

$$\boxed{E_i(k_1,k_2)=E_i''+\tfrac{1}{2}\hbar^2\left[\left(w_{11}-\frac{w_{13}^2}{w_{33}}\right)k_1^2+2\left(w_{12}-\frac{w_{13}w_{23}}{w_{33}}\right)k_1k_2+\left(w_{22}-\frac{w_{23}^2}{w_{33}}\right)k_2^2\right]}$$

Плотность состояний и циклотронная масса

$$dG = \frac{2g_n dp_x dp_y}{(2p\mathbf{h})^2} = \frac{2g_n dS_p}{(2p\mathbf{h})^2} = \frac{2g_n}{(2p\mathbf{h})^2}\frac{dS_p}{dE}dE \Rightarrow \quad g(E) = \frac{2g_n}{(2p\mathbf{h})^2}\frac{dS_p}{dE}$$

В физике металлов доказывается, что циклотронная масса $m_c = \frac{1}{2p}\frac{dS_p}{dE}$

В случае поверхности Ферми в форме эллипса имеем $m_c = \sqrt{m_x m_y}$

$E = \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y}$ Для того, чтобы получить данное выражение достаточно совершить поворот системы координат в плоскости xy на α

$$\mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2(w_{zz}w_{xy} - w_{xz}w_{yz})}{w_{xx}w_{zz} - w_{yy}w_{zz} - w_{xz}^2 + w_{yz}^2}$$

$$\frac{1}{m_x} = \left(w_{xx} - \frac{w_{xz}^2}{w_{zz}}\right)\cos^2(\alpha) + \left(w_{yy} - \frac{w_{yz}^2}{w_{zz}}\right)\sin^2(\alpha) + 2\left(w_{xy} - \frac{w_{xz}w_{yz}}{w_{zz}}\right)\sin(2\alpha)$$

$$\frac{1}{m_y} = \left(w_{yy} - \frac{w_{yz}^2}{w_{zz}}\right)\cos^2(\alpha) + \left(w_{xx} - \frac{w_{xz}^2}{w_{zz}}\right)\sin^2(\alpha) - 2\left(w_{xy} - \frac{w_{xz}w_{yz}}{w_{zz}}\right)\sin(2\alpha)$$

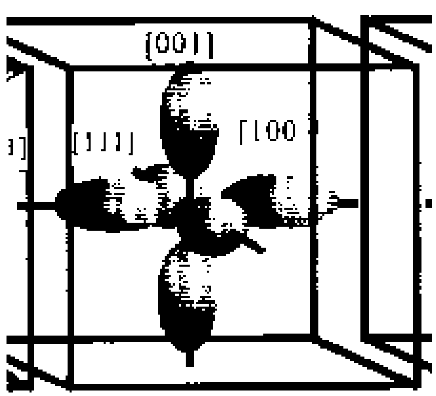
Масса при разных ориентациях

TABLE I. Effective masses for three surface orientations, for semiconductors having band structures like those of the conduction band of Si (six {100} ellipsoids of revolution) or of Ge (four {111} ellipsoids of revolution). The principal effective masses in the ellipsoids are m_t, m_t, and m_l. The derived values are m_3, the effective mass perpendicular to the surface, and m_1 and m_2, the principal masses of the constant-energy ellipse in the surface, defined by Eq. (13). The degeneracy of each set of ellipses is n_v.

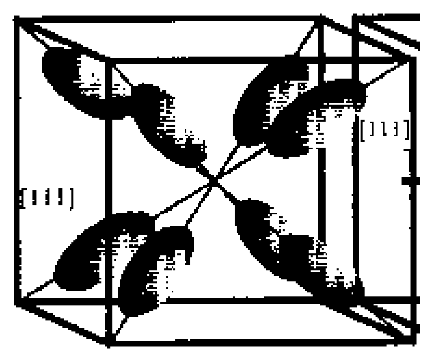
Surface orientation	Si m_1	Si m_2	Si m_3	Si n_v	Ge m_1	Ge m_2	Ge m_3	Ge n_v
{100}	m_t m_t	m_t m_l	m_l m_t	2 4	m_t	$(m_t+2m_l)/3$	$(3m_t m_l)/(m_t+2m_l)$	4
{110}	m_t m_t	$(m_t+m_l)/2$ m_l	$(2m_t m_l)/(m_t+m_l)$ m_t	4 2	m_t m_t	$(m_l+2m_t)/3$ m_l	$(3m_t m_l)/(m_l+2m_t)$ m_t	2 2
{111}	m_t	$(m_t+2m_l)/3$	$(3m_t m_l)/(m_t+2m_l)$	6	m_t m_t	m_t $(m_t+8m_l)/9$	m_l $(9m_t m_l)/(m_t+8m_l)$	1 3

$m_l = 0.916 m_0$ $\quad$ $m_t = 0.19 m_0$

$m_l = 1.58 m_0$ $\quad$ $m_t = 0.082 m_0$



Si



Ge

Спектр при разных ориентациях

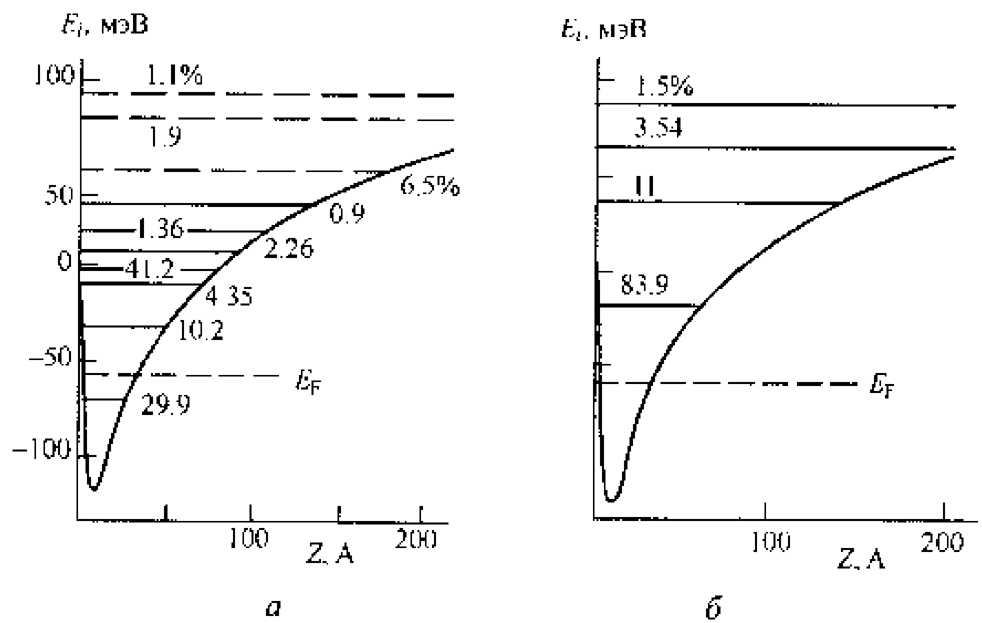


Рис. 4.17. Энергетические диаграммы ОПЗ с указанием заселенности квантовых подзон для ориентации поверхностей (111) (*a*) и (100) (*б*); штриховые линии – положения квантовых подзон для электронов с более легкой массой квантования; цифры – процентный вклад заполнения данного уровня в общую плотность заряда