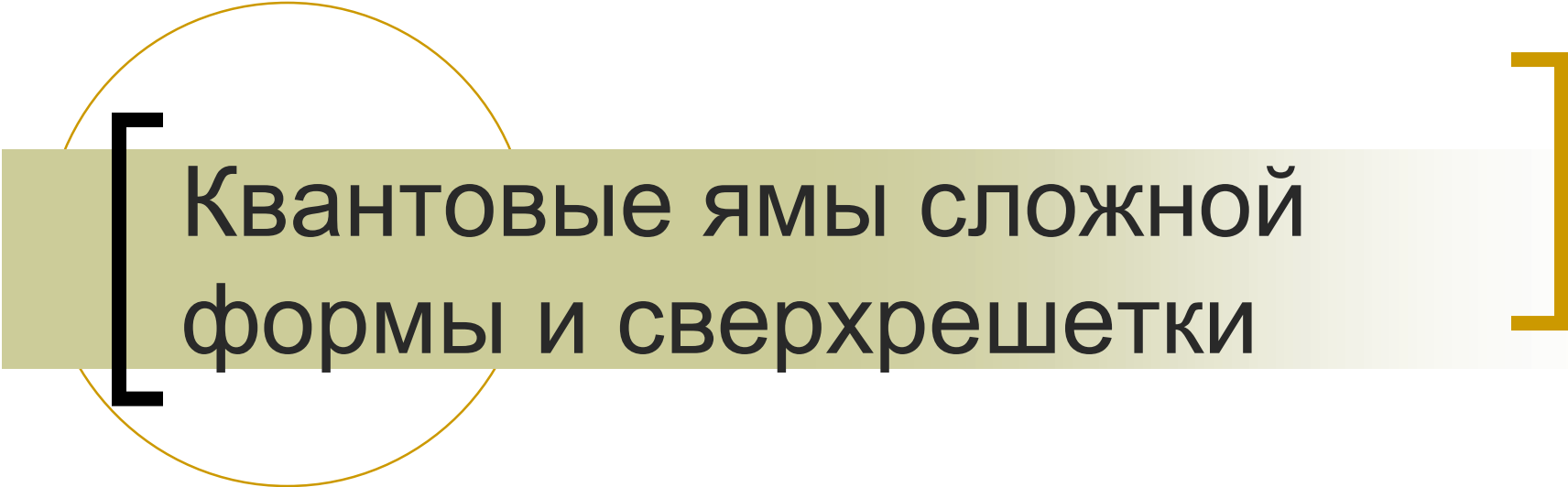




Квантовые ямы сложной формы и сверхрешетки

1. Квантовая яма с провалом.
2. Двойная квантовая яма.
3. Сверхрешетки.

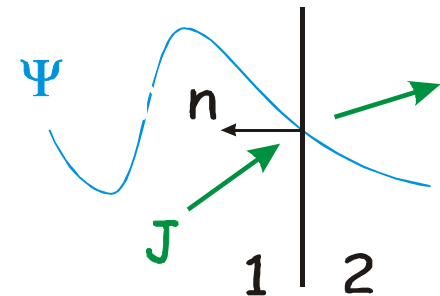
[Граничные условия]

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \text{div } \vec{J}$$

Закон «сохранения волновой функции»

$$r = |y|^2 \quad J = \frac{1}{2} \left(y^* \frac{\hat{p}}{m(z)} y + y \frac{\hat{p}^*}{m(z)} y^* \right)$$

В случае стационарных состояний

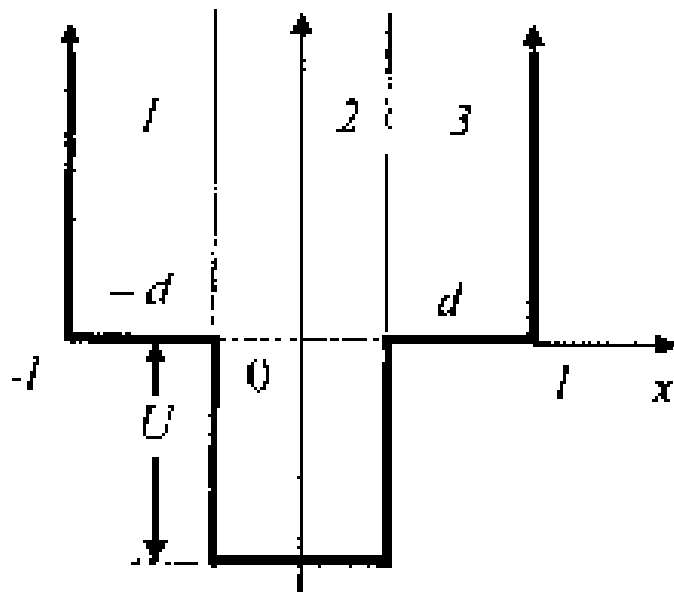


$$\frac{\partial r}{\partial t} = \text{div } \vec{J} = 0$$

$$J \text{ - конечно} \Rightarrow y_1 = y_2$$

$$J_{n1} = J_{n2} \Rightarrow \frac{1}{m_1} \frac{\partial y_1}{\partial z} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial y_2}{\partial z}$$

Квантовая яма с провалом



$$\left[-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} m(x)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} + U(x) \right] \Psi = E \Psi$$

Для областей 1 и 3 ($d \leq |x| \leq l$)

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0 \right) \Psi = E \Psi$$

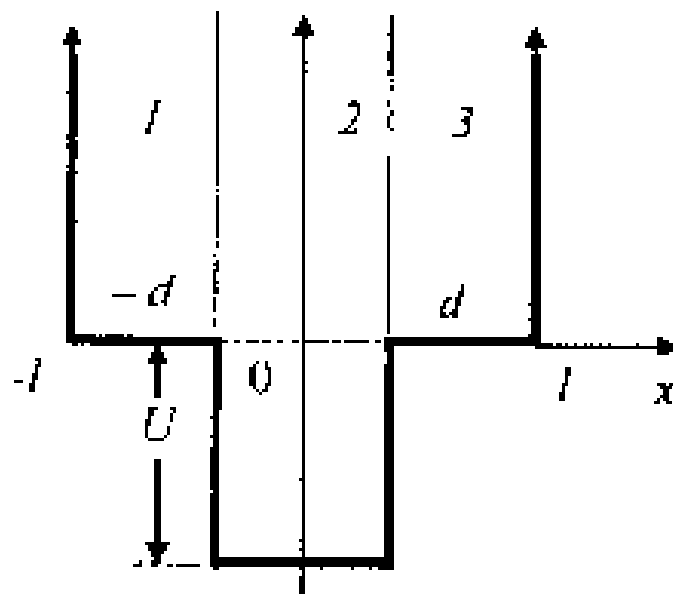
для области 2 ($|x| \leq d$)

$$\Psi_j = A_j \exp(iK_j x) + B_j \exp(-iK_j x), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$K_{1,3} = \sqrt{\frac{2m_1}{\hbar^2} E}; \quad K_2 = \sqrt{\frac{2m_2}{\hbar^2} (E + U)}.$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - U \right) \Psi = E \Psi$$

Квантовая яма с провалом



при $|x| = d$

$$\Psi_{1,3} = \Psi_2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{m_1} \frac{d\Psi_{1,3}}{dx} = \frac{1}{m_2} \frac{d\Psi_2}{dx}$$

при $|x| = l$

$$\Psi_{1,3} = 0$$

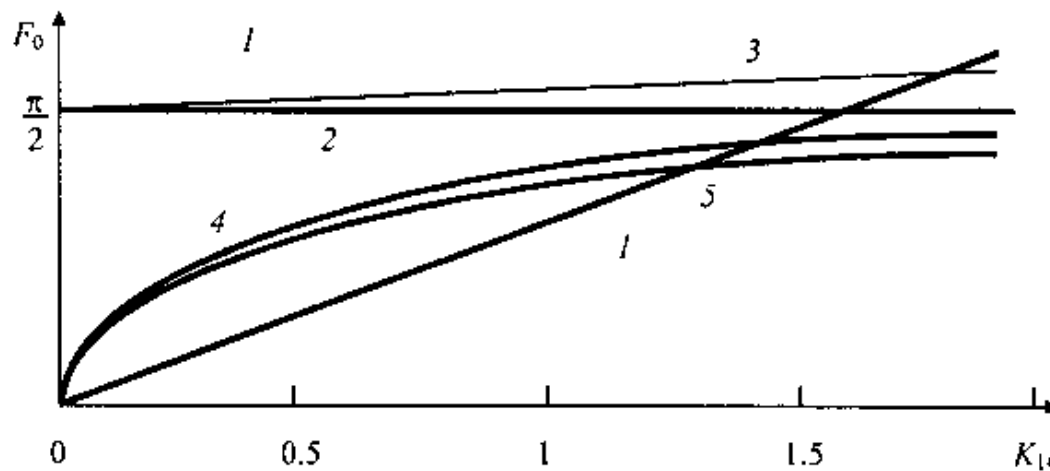
$$\operatorname{tg}[K_1(l-d)] = \frac{m_2}{m_1} \frac{K_1}{K_2} \operatorname{ctg}(K_2 d)$$

$$\operatorname{tg}[K_1(l-d)] = -\frac{m_2}{m_1} \frac{K_1}{K_2} \operatorname{tg}(K_2 d)$$

$$\Psi_j = A_j \exp(iK_j x) + B_j \exp(-iK_j x), \quad j = 1, 2, 3,$$

$$K_{1,3} = \sqrt{\frac{2m_1}{\hbar^2} E}; \quad K_2 = \sqrt{\frac{2m_2}{\hbar^2} (E + U)}.$$

Основное состояние



$$K_1 l = F_0$$

$$F_0 = \frac{\pi}{2} + K_1 d - \arctg \left[\frac{m_1}{m_2} \frac{K_2}{K_1} \operatorname{tg}(K_2 d) \right]$$

1 — $K_1 l$; 2–5 — $F_0(K_1 l)$; 2 — $m_2 = m_1$ и $U = 0$; 3 — $m_2 < m_1$ и $U = 0$; 4 — $m_2 < m_1$ и $U \neq 0$; 5 — $m_2 = m_1$ и $U \neq 0$

$$m_2 \rightarrow 0$$

$$F_0 = \frac{\pi}{2} + K_1 d - \left(\frac{m_1}{m_2} \frac{K_2^2}{K_1} d \right) = \frac{\pi}{2} + K_1 d - \frac{m_1}{K_1} \frac{2d}{\hbar^2} (E + U)$$

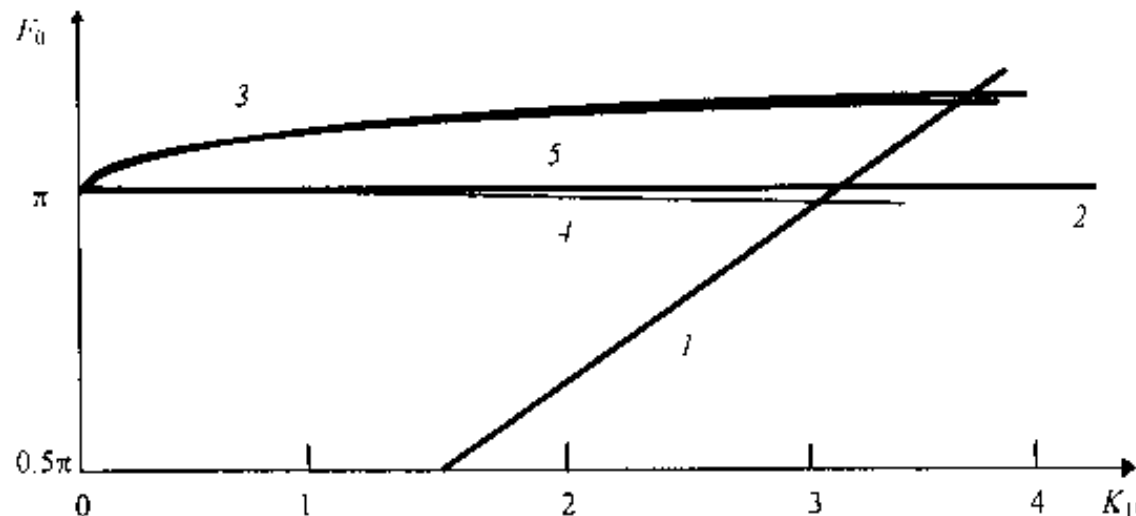
Падение состояния в провал

$$F_0'(0) < 1$$

$$d \left[1 + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{E_d}{U}} \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{U}{E_d}} \right) \right] > l \quad E_d = \frac{\hbar^2}{2m_2 d^2}$$

Первое возбужденное состояние

$$K_1 l = F_1 \quad F_1 = \pi + K_1 d - \arctg \left[\frac{m_2}{m_1} \frac{K_1}{K_2} \operatorname{tg}(K_2 d) \right]$$



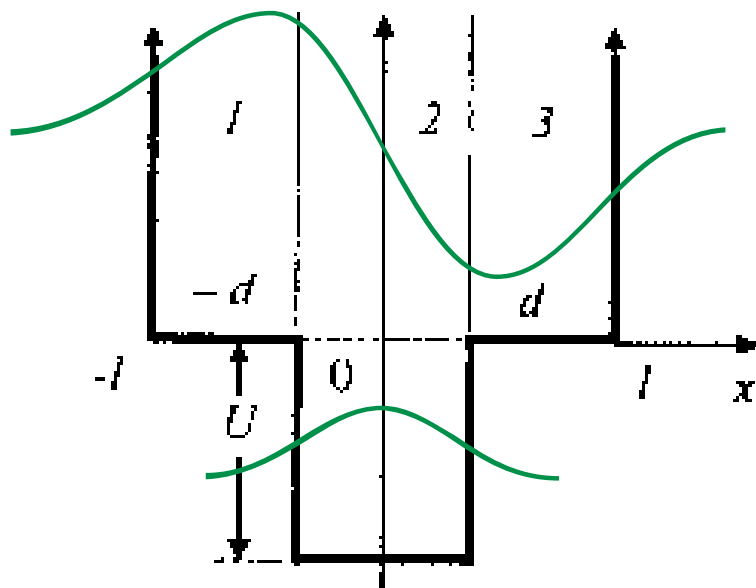
1 – $K_1 l$; 2 – 5 – $F_1(K_1 l)$; 2 – $m_2 = m_1$, $U = 0$; 3 – $m_2 < m_1$, $U = 0$; 4 – $m_2 = m_1$, $U \neq 0$; 5 – $m_2 < m_1$, $U \neq 0$

$$m_2 \rightarrow 0$$

$$F_1 = \pi + K_1 d$$

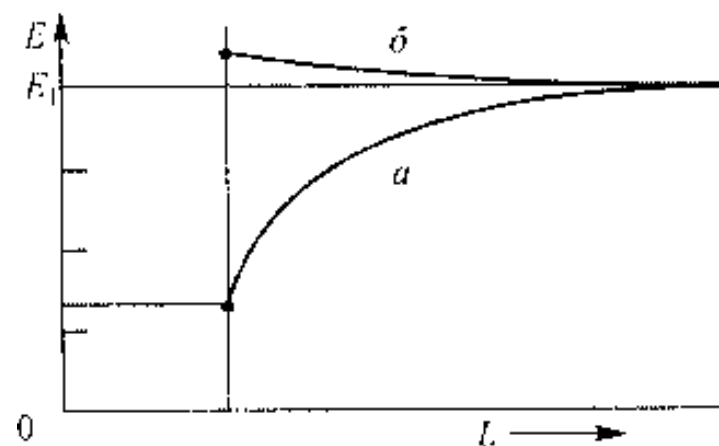
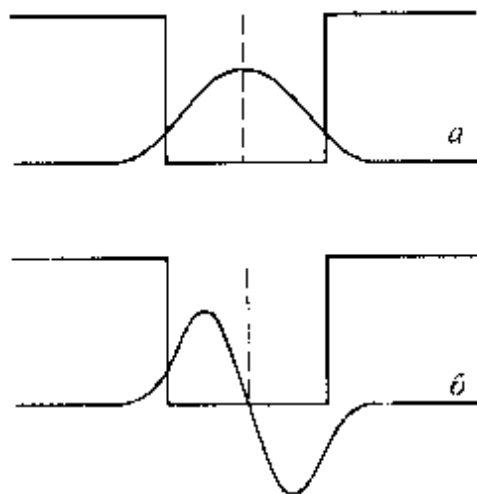
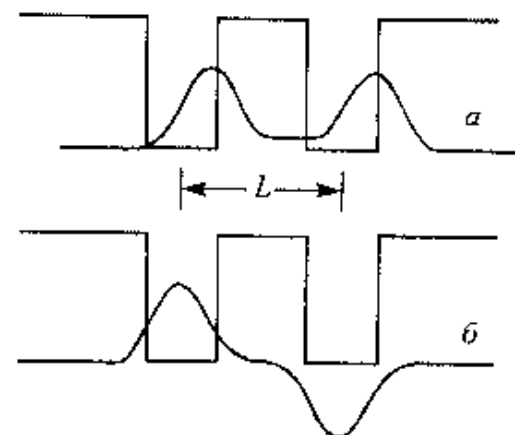
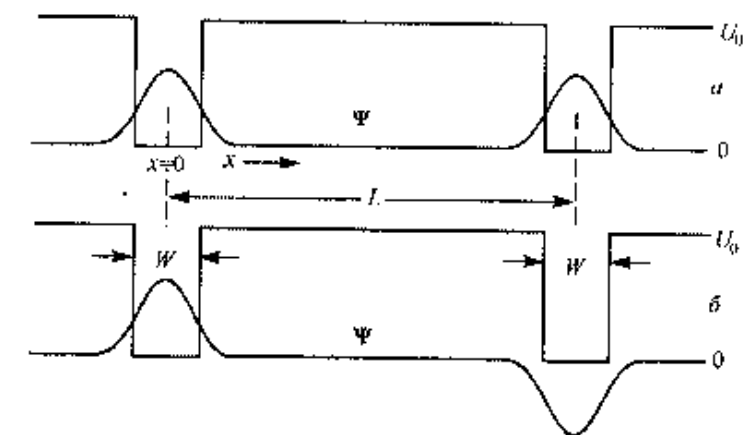
В результате оказывается, что можно создать структуру, у которой наличие слоя с меньшей эффективной массой приведет к понижению энергии основного и повышению энергии возбужденного состояния, т.е. энергетический зазор между этими уровнями станет больше, чем в случае простой квантовой ямы,

[Качественное объяснение]

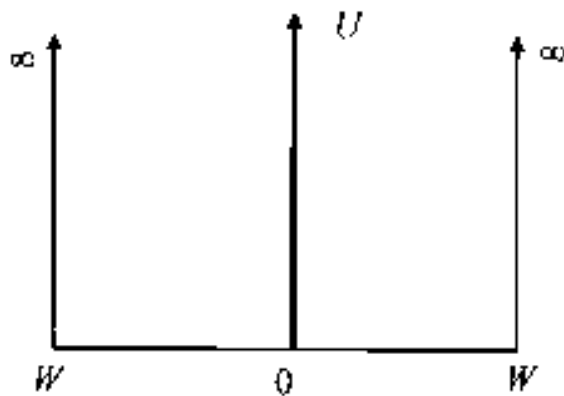


$$\bar{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} U(x) \cdot |\Psi|^2 dx$$

Двойная квантовая яма



[Яма с δ -барьером в центре]



$$U(x) = \begin{cases} U(x) = \alpha \delta(x) & \text{при } |x| < W \\ U(x) = \infty & \text{при } |x| > W, \end{cases}$$

$$|x| < W$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \alpha \delta(x) \Psi = E \Psi$$

$$K = \sqrt{(2m/\hbar^2)E}$$

$$0 \leq x \leq W$$

$$\Psi_1 = A_1 \exp(iKx) + B_1 \exp(-iKx)$$

$$-W \leq x \leq 0$$

$$\Psi_2 = A_2 \exp(iKx) + B_2 \exp(-iKx)$$

$$|x| = W$$

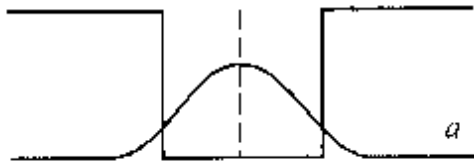
$$x = 0$$

$$\Psi_1 = 2iB_1 \exp(-iKW) \sin[K(W-x)]$$

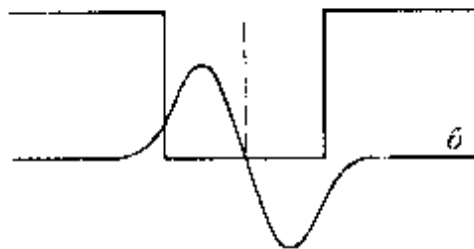
$$\Psi_2 = 2iB_2 \exp(iKW) \sin[K(W+x)]$$

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \quad -\Psi'_1(0) + \Psi'_2(0) = \frac{2m}{\hbar^2} \alpha \Psi(0)$$

[Спектр ямы с δ -барьером]



$$\frac{K\hbar^2}{m\alpha} = -\operatorname{tg}(KW)$$

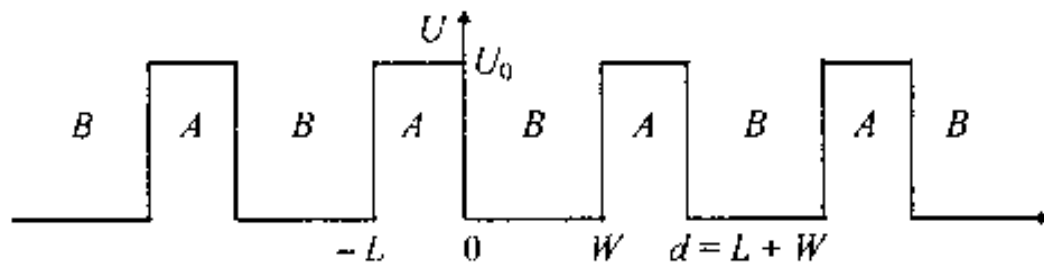


$$\alpha \gg \frac{\hbar^2}{mW} \quad \alpha \gg \frac{\hbar^2}{m} K$$

$$E_n^+ \cong E_{n\infty} \left(1 - \frac{2\hbar^2}{m\alpha W} \right)$$

$$E_n^- = E_{n\infty}$$

[Сверхрешетки]



$$\Psi(x) = u(x) \exp(iKx)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2iK \frac{du}{dx} + (K_1^2 - K^2)u = 0 \quad \text{для } 0 \leq x \leq W$$

$$K_1 = \sqrt{(2m/\hbar^2)E}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + 2iK \frac{du}{dx} - (\beta^2 + K^2)u = 0 \quad \text{для } -L < x < 0$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(U_0 - E)}$$

$$0 \leq x \leq W \quad u = A \exp[i(K_1 - K)x] + B \exp[-i(K_1 + K)x]$$

$$-L < x < 0 \quad u = C \exp[i(\beta - iK)x] + D \exp[-(\beta + iK)x]$$

Миниэона

$$A + B = C + D,$$

$$i(K_1 - K)A - i(K_1 + K)B = (\beta - iK)C - (\beta + iK)D$$

$$\exp[i(K_1 - K)W]A + \exp[-i(K_1 + K)W]B =$$

$$= \exp[-(\beta - iK)L]C + \exp[(\beta + iK)L]D,$$

$$\begin{aligned} i(K_1 - K)\exp[i(K_1 - K)W]A - i(K_1 + K)\exp[-i(K_1 + K)W]B = \\ = -(\beta - iK)\exp[-(\beta - iK)L]C + (\beta + iK)\exp[(\beta + iK)L]D. \end{aligned}$$

$$F(E)$$

$$\cos(Kd) = \boxed{\cos(K_1 W) \operatorname{ch}(\beta L) - 0.5[\eta - 1/\eta] \sin(K_1 W) \operatorname{sh}(\beta L)} \quad \eta = K_1/\beta$$

$$L \rightarrow \infty \quad 0.5 \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) = \operatorname{ctg}(KW) \quad E = E_n + S_n + 2t_n \cos(Kd) \quad t_n = \frac{1}{2} \frac{dE}{dF}$$

Согласно (1.11.9) взаимодействие между ямами проявляется двояким образом. Во-первых, связанное состояние E_n сдвигается на величину S_n . Во-вторых, в системе из N невзаимодействующих КЯ уровень E_n будет N -кратно вырожден. Взаимодействие снимает это вырождение и создает зону конечной ширины $4t_n$.