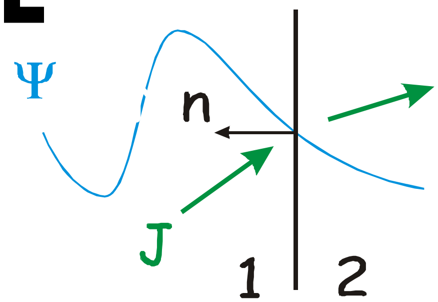
Туннелирование

1. Метод матриц переноса.
2. Резонансное туннелирование.
3. Приближение туннельного гамильтониана
4. Время туннелирования.

Вероятность туннелирования и прозрачность барьера



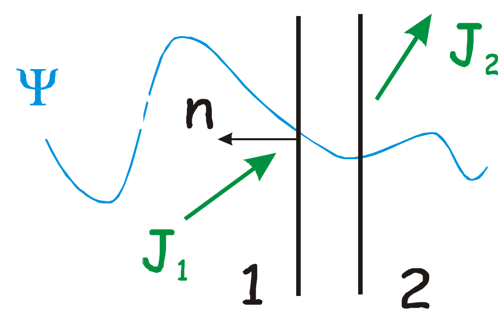
В случае локализованных состояний.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^2 dz = 1 \qquad P = \int_{2} |y|^2 dz$$

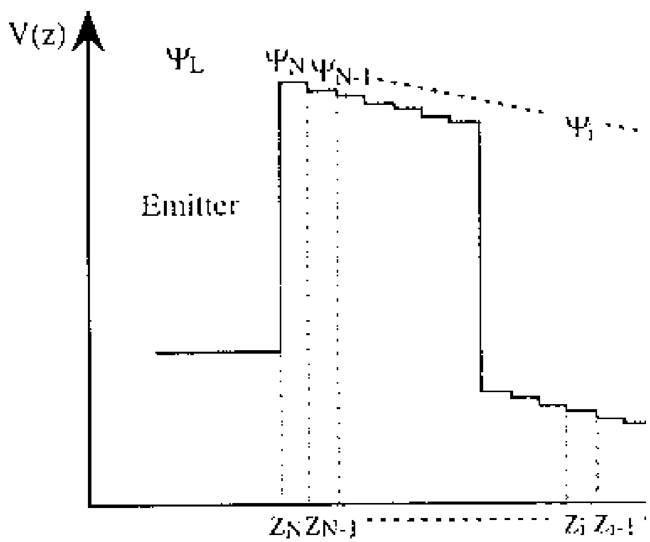
В случае нелокализованных состояний

$$J_i = \frac{1}{2}\left(y^* \frac{\hat{p}_i}{m(z)} y + y \frac{\hat{p}_i^*}{m(z)} y^* \right) = 1$$

$$T = \frac{J_{2n}}{J_{1n}}$$



Матрицы переноса



$$\Psi^{(i)}_{k_z^{(i)}}(z) = A^{(i)}_{k_z^{(i)}} \exp\left(\mathrm{i}k_z^{(i)} z\right) + B^{(i)}_{k_z^{(i)}} \exp\left(-\mathrm{i}k_z^{(i)} z\right)$$

$$k_z^{(i)} = \frac{\sqrt{2m_*^{(i)}\left(E_z - V^{(i)}\right)}}{\hbar}$$

$$\psi_{k_z^{(i)}}(z_{i+1}) = \psi_{k_z^{(i+1)}}(z_{i+1})$$

$$\frac{1}{m_*^{(i)}}\frac{\partial \psi_{k_z^{(i)}}}{\partial z}(z_{i+1}) = \frac{1}{m_*^{(i+1)}}\frac{\partial \psi_{k_z^{(i+1)}}}{\partial z}(z_{i+1})$$

$$\begin{pmatrix} A^{(i+1)}_{k_z^{(i+1)}} \\ B^{(i+1)}_{k_z^{(i+1)}} \end{pmatrix} = T^{(i)} \begin{pmatrix} A^{(i)}_{k_z^{(i)}} \\ B^{(i)}_{k_z^{(i)}} \end{pmatrix}$$

$$T^{(i)} = \begin{pmatrix} \alpha_+^{(i)} P & \alpha_-^{(i)}/Q \\ \alpha_-^{(i)} Q & \alpha_+^{(i)}/P \end{pmatrix}$$

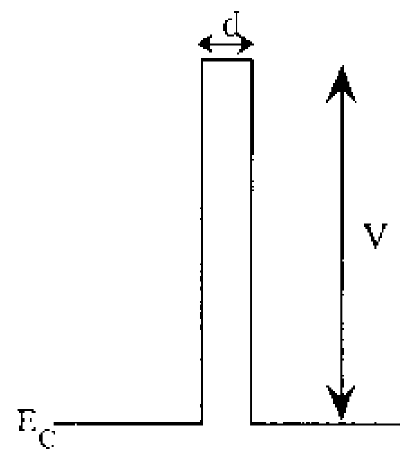
$$P = \exp\{\mathrm{i}(k_z^{(i)} - k_z^{(i+1)}) z_{i+1}\}$$

$$\alpha_\pm^{(i)} = \frac{1}{2}\{1 \pm (m^{*(i+1)}/m^{*(i)})\ (k_z^{(i)}/k_z^{(i+1)})\}$$

$$Q = \exp\{\mathrm{i}(k_z^{(i)} - k_z^{(i+1)}) z_{i+1}\}$$

Расчет прозрачности барьера

$$\begin{pmatrix} A^{L}_{E_z} \\ B^{L}_{E_z} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} A^{R}_{E_z} \\ B^{R}_{E_z} \end{pmatrix} \qquad T = T^{(N)} T^{(N-1)} T^{(N-2)} \ldots T^{(2)} T^{(1)}$$



$$T(E_z) = \frac{m^{*L}}{m^{*R}} \frac{k^{R}}{k^{L}} \frac{|A^{R}_{E_z}|^2}{|A^{L}_{E_z}|^2}$$

$$\frac{A^3_{E_z}}{A^1_{E_z}} = e^{-ik_z d} \left\{ \cosh(\kappa_z d) - i \frac{2E_z - V}{2\sqrt{(E_z(V - E_z))}} \sinh(\kappa_z d) \right\}^{-1}$$

$$T_{SB}(E_z) = \left\{ 1 + \frac{V^2}{4E_z(V - E_z)} \sinh^2(\kappa_z d) \right\}^{-1}$$

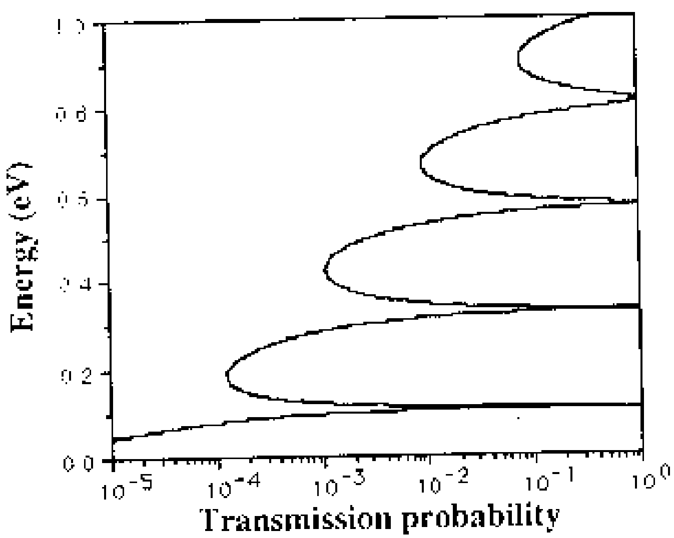
При $E_z << V$

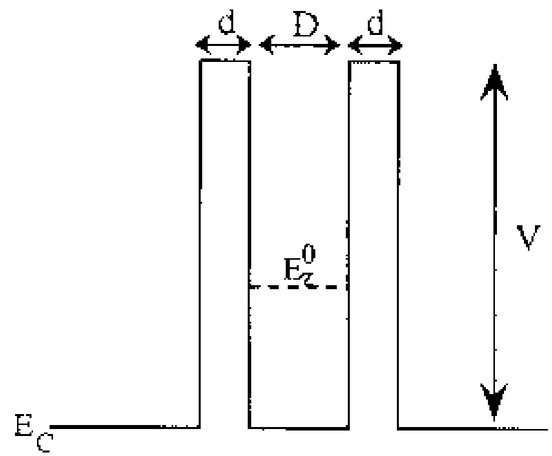
$$T_{SB}(E_z) \approx \frac{16 E_z (V - E_z)}{V^2} e^{-2\kappa_z d}$$

$$k_z = \frac{\sqrt{2m_* E_z}}{\hbar} \qquad k_z = \frac{\sqrt{2m_*(V - E_z)}}{\hbar}$$

Резонансное туннелирование

$$\frac{A^5_{E_z}}{A^1_{E_z}} = e^{-ik_z(2d+D)}\left[\left\{\cosh(\kappa_z d) - i\frac{2E_z - V}{2\sqrt{(E_z(V-E_z))}}\sinh(\kappa_z d)\right\}^2 e^{-ik_z D} + \frac{4V^2}{E_z(V-E_z)}\sinh^2(\kappa_z d)e^{ik_z D}\right]^{-1}$$

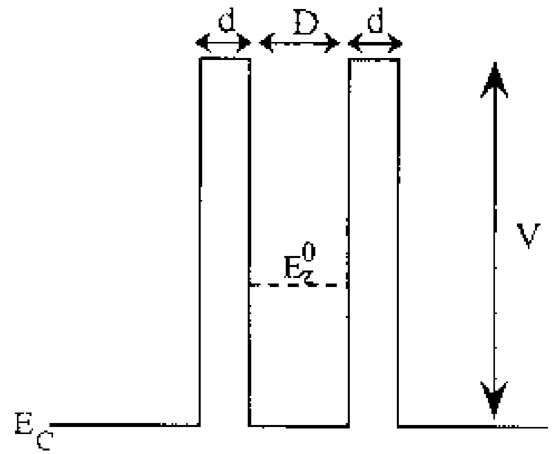




Энергия резонанса E_z^0.

$$2\cos(k_z^0 D) + \frac{V - 2E_z^0}{\sqrt{(E_z^0(V - E_z^0))}}\sin(k_z^0 D) \cong 0$$

Формула Брейта-Вигнера



При E_z.- $E_z^0 << V$ и $E_z^0 << V$

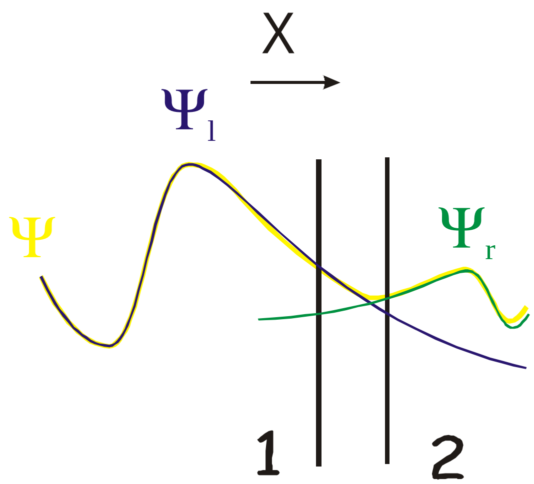
$$\frac{A^5_{E_z}}{A^1_{E_z}} \approx e^{-ik_z(2d+D)} \frac{\Gamma}{(E_z - E_z^0) + i\Gamma}$$

$$\Gamma \cong 4E_z^0 e^{-2\kappa_z^0 d}(k_z^0 D + 2k_z^0/\kappa_z^0)^{-1} \approx 2\hbar T_{SB}(E_z^0)v_z^0/(D + 2/\kappa_z^0)$$

$$T_{SB}(E_z^0) \approx e^{-2\kappa_z^0 d} \qquad v_z^0 = \hbar k_z^0/m^*$$

$$\boxed{T(E_z) = \frac{\Gamma^2}{\left(E_z - E_z^0\right)^2 + \Gamma^2}}$$

Приближение туннельного гамильтониана



Внутри барьера $\Psi_r = ae^{-cx}$ $\Psi_l = be^{cx}$

$$j(x) = \frac{-i\hbar}{2m}\left(\psi^*(x)\frac{d\psi}{dx} - \psi(x)\frac{d\psi^*}{dx}\right)$$

Только в случае линейной комбинации

$$j(x) = \frac{i\hbar\varkappa}{m}(ab^* - ba^*) \neq 0$$

Определение матричного элемента возмущения

$$\psi = c(t)\,\psi_l e^{-iE_l t} + d(t)\,\psi_r e^{-iE_r t}$$

$$i\dot{c}\psi_l e^{-iE_l t} + c\psi_l E_l e^{-iE_l t} + i\dot{d}\psi_r e^{-iE_r t} + d\psi_r E_r e^{-iE_r t} = ce^{-iE_l t} H\psi_l + de^{-iE_r t} H\psi_r$$

$|\psi_l| >> |\psi_r| \Rightarrow c \approx 1; d << 1$

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(cc^*|\psi_l|^2 + dd^*|\psi_r|^2\right) = 0 \Rightarrow \dot{c} = 0$$

Матричный элемент туннельного перехода

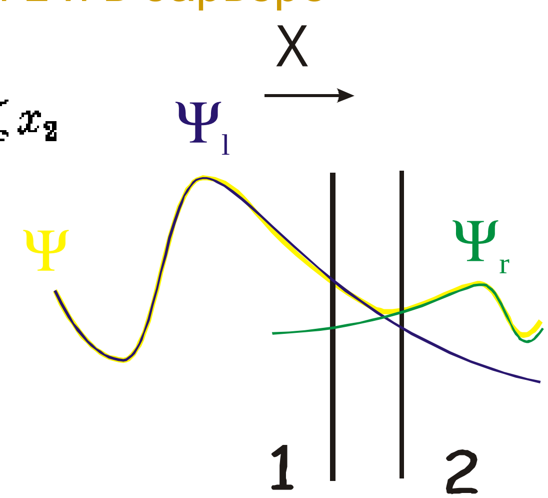
$$i\dot{d}\psi_r e^{-iE_r t} = (H - E_l)\,\psi_l e^{-iE_l t} \qquad i\dot{d} = \int \psi_r^* (H - E_l)\,\psi_l\,dx\,\exp\,[i\,(E_r - E_l)\,t]$$

$$H = H_0 + H_1 \qquad H_0\psi_l = E_l\psi_l \qquad \int \psi_r^* (H - E_l)\,\psi_l\,dx = \int \psi_r^* H_1 \psi_l\,dx.$$

$$T_{rl} = \int \psi_r^* (H - E_l)\,\psi_l\,dx$$

Равен нулю в области 1 и в барьере

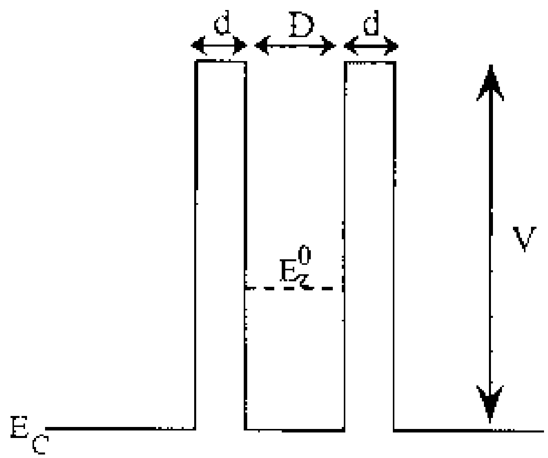
$$T_{rl} = \int_{x_B}^{\infty} \left[\psi_r^* (H - E_l)\,\psi_l - \psi_l\,(H - E_r)\,\psi_r^*\right] dx, \quad x_1 \leqslant x_B \leqslant x_2$$



$$T_{rl} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi_r^* \frac{d\psi_l}{dx} - \psi_l \frac{d\psi_r^*}{dx}\right)_{x_B}$$

$$T_{rl} = -i\hbar j_{rl}.$$

Время туннелирования



$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} \qquad W_{lr} \approx \frac{2\pi}{\hbar}\left|T_{lr}\right|^2 \approx \frac{1}{\tau}$$

Конечное время жизни означает однородное уширение уровня E_z^0

$$T(E_z) = \frac{\Gamma^2}{\left(E_z - E_z^0\right)^2 + \Gamma^2} \qquad \Gamma \approx \left|T_{lr}\right|^2$$