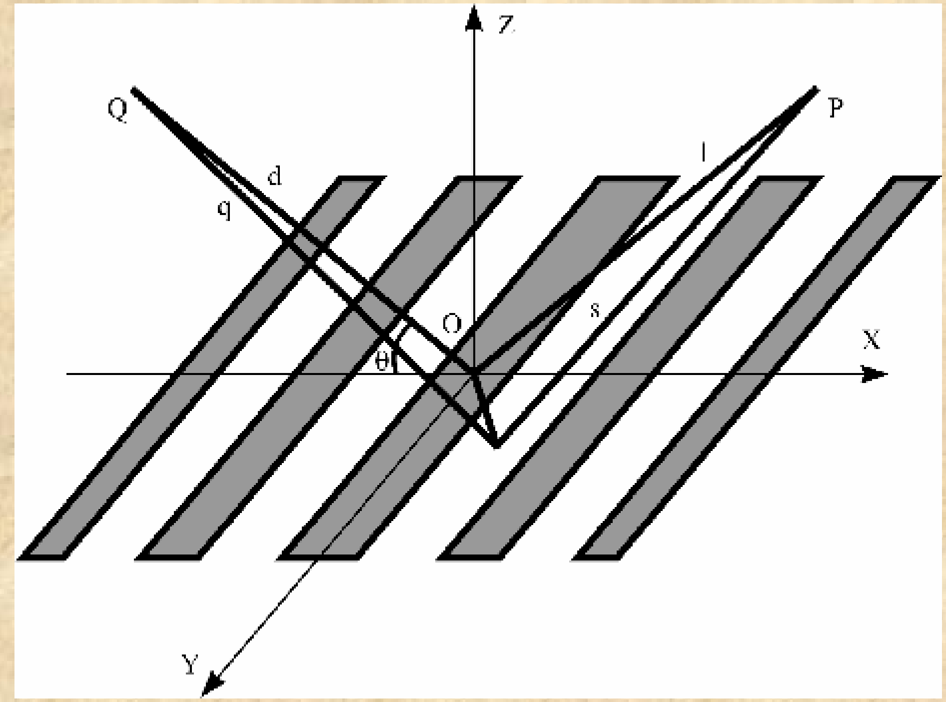
Дифракционная оптика скользящего падения



$$E(P) = -\frac{iC}{2l} \iint\limits_S F(\vec{r}) \frac{\exp(-ik(q+s))}{qs} \left\{ \cos(\vec{n}, \vec{q}) - \cos(\vec{n}, \vec{s}) \right\} dS$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$s^2 = (l - x\cos q)^2 + (x\sin q)^2 + y^2$$

$$q^2 = (d + x\cos q)^2 + (x\sin q)^2 + y^2$$

$$l,\ d,\ x\cos q \ >>\ x\sin q,\ y$$

$$|q| \approx d + x\cos q + \frac{(x\sin q)^2}{2(d + x\cos q)} + \frac{y^2}{2(d + x\cos q)} + \ldots$$

$$|s| \approx l - x\cos q + \frac{(x\sin q)^2}{2(l - x\cos q)} + \frac{y^2}{2(l - x\cos q)} + \ldots$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$\cos(\vec{n},\vec{q}) = \frac{d\sin q}{d + x\cos q} \qquad \cos(\vec{n},\vec{s}) = \frac{l\sin q}{l - x\cos q}$$

$$E(P) = -\frac{iC}{2l}\frac{\exp(-ik(l+d))}{ld}\times$$

$$\times\iint_s F(x,y)\frac{\exp\left(-ik\left[\frac{(x\sin q)^2+y^2}{2(l-x\cos q)}+\frac{(x\sin q)^2+y^2}{2(d+x\cos q)}\right]\right)}{\left(1-\frac{x\cos q}{l}\right)\left(1+\frac{x\cos q}{d}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{d\sin q}{d+x\cos q}+\frac{l\sin q}{l-x\cos q}\right\}dxdy$$

В предельных случаях *l, d*>>*x* и (или) $q \to p/2$ выражение (2.8) принимает свою обычную форму как, например, было продемонстрировано в [35, 87].

Дифракционная оптика скользящего падения

Для зонных пластинок меридиональной геометрии (рис. 2.1а), $F(x,y)=F(x)$, и интегрируя выражение (2.8) по y, можно записать:

$$E(P) = -\frac{iC}{2l}\frac{\exp(-ik(l+d))}{ld}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\frac{\exp\left(-\frac{ik}{2}(x\sin q)^2\left[\frac{1}{(l-x\cos q)}+\frac{1}{(d+x\cos q)}\right]\right)}{\left(1-\frac{x\cos q}{l}\right)\left(1+\frac{x\cos q}{d}\right)}\times$$

$$\times\left\{\frac{d\sin q}{d+x\cos q}+\frac{l\sin q}{l-x\cos q}\right\}\sqrt{\frac{2p(l-x\cos q)(d+x\cos q)}{ik(l+d)}}dx$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$f = (l d)/(l + d)$$

$$t = \frac{x \sin q}{\sqrt{\left(1 - \frac{x \cos q}{l}\right)\left(1 + \frac{x \cos q}{d}\right)}}$$

$$E(P) = -C\sqrt{\frac{i}{l}}\,\frac{\exp(-ik(l+d))}{\sqrt{ld(l+d)}}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\exp\left(-\frac{ikt^2}{2f}\right)dt$$

$$\frac{kt^2}{2f} = pn \qquad \frac{(x \sin q)^2}{\left(1 - \frac{x \cos q}{l}\right)\left(1 + \frac{x \cos q}{d}\right)} = fn\,l$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$F(t)=\begin{cases}1, & |t|\in\left(\sqrt{2nfl},\sqrt{(2n+1)fl}\right)\\ \exp(i\Delta j), & |t|\in\left(\sqrt{(2n+1)fl},\sqrt{(2n+2)fl}\right)\end{cases},$$

$$I(P)=I_0\frac{16}{p^2}\sin^2\left(\frac{\Delta j}{2}\right)N=\left[\Delta j=p\right]=\frac{16}{p^2}NI_0$$

$$I_0=\left\{\frac{C}{(l+d)}\right\}^2$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$d = \Delta t_N = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f\,l}{N}}$$

$$\frac{\Delta\, l}{l} \leq \frac{1}{N}$$

$$u = \frac{x\sin q}{\sqrt{\left(1 - \frac{x\cos q}{l}\right)\left(1 + \frac{x\cos q}{d}\right)}} \qquad v = \frac{y}{\sqrt{\left(1 - \frac{x\cos q}{l}\right)\left(1 + \frac{x\cos q}{d}\right)}}$$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D'} f(u,v)\left|\frac{J(x,y)}{J(u,v)}\right| dudv \qquad \left|\frac{J(x,y)}{J(u,v)}\right| = \left|\frac{J(u,v)}{J(x,y)}\right|^{-1}$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$\left|\frac{J(x,y)}{J(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad E(P) = Const\iint_S F(u,v)\exp\left(-\frac{ik}{2f}(u^2+v^2)\right)dudv$$

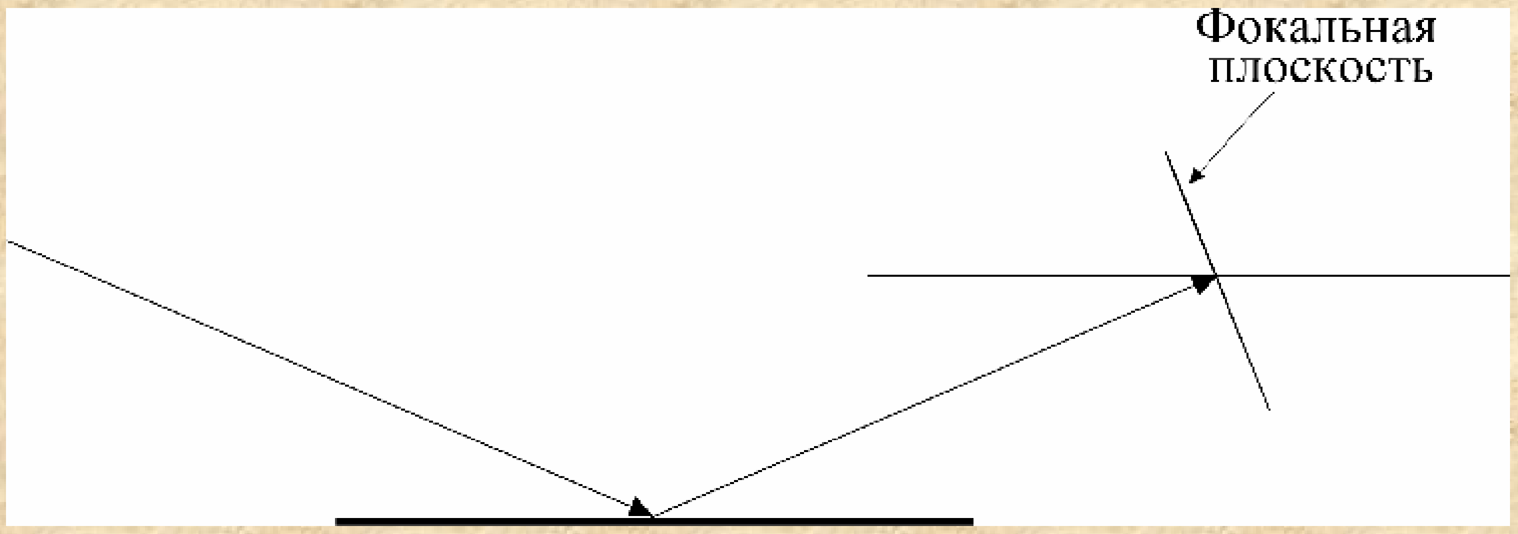
Саггитальный случай соответствует $F(u,v)=F(v)$. Интегрируя по u, получается:

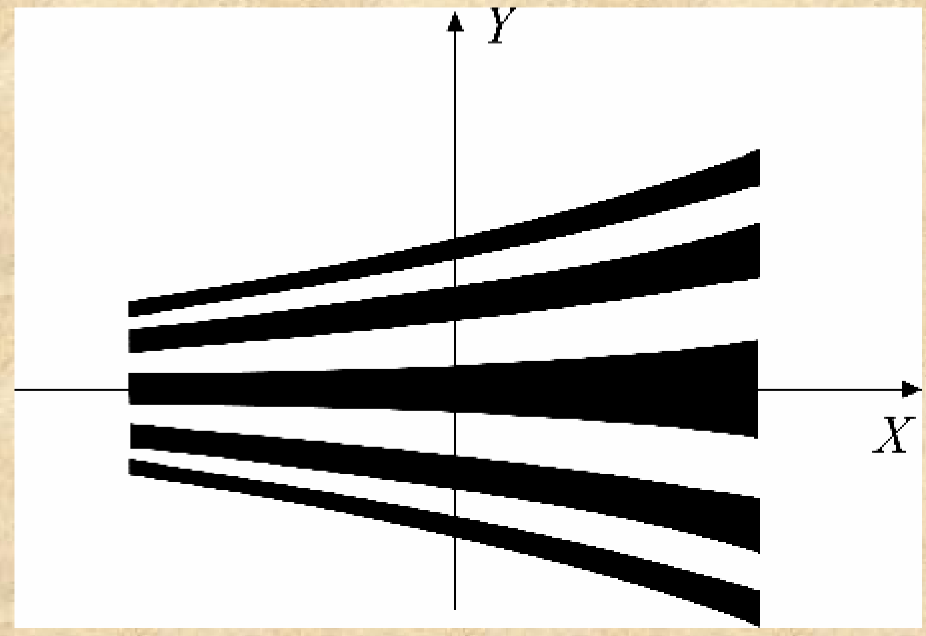
$$E(P) = -C\sqrt{\frac{i}{l}}\frac{\exp(-ik(l+d))}{\sqrt{ld(l+d)}}\int_{-\infty}^{\infty} F(v)\exp\left(-\frac{ik}{2f}v^2\right)dv.$$

Аналогично (2.12) и (2.13), запишем выражение для границ зон Френеля в саггитальном случае:

$$\frac{y^2}{\left(1-\frac{x\cos q}{l}\right)\left(1+\frac{x\cos q}{d}\right)} = fn\,l$$

Дифракционная оптика скользящего падения





Дифракционная оптика скользящего падения

Приложение 1. **Вычисление якобиана перехода при выводе (1.18).**

$$\left|\frac{J(x,y)}{J(u,v)}\right| = \left|\frac{J(u,v)}{J(x,y)}\right|^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{-1} = \left[\frac{\partial u}{\partial y} = 0\right] =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-1};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1 + \frac{x\cos\theta}{d}\right)}};$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\sin\theta\sqrt{\left(1-\frac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{x\cos\theta}{d}\right)}-\frac{1}{2\sqrt{\left(1-\frac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{x\cos\theta}{d}\right)}}x\sin\theta\times\left(-\frac{\cos\theta}{f}\left(1+\frac{x\cos\theta}{d}\right)+\frac{\cos\theta}{d}\left(1-\frac{x\cos\theta}{f}\right)\right)}{\left(1-\frac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{x\cos\theta}{d}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\theta\left(2\left(1-\frac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{x\cos\theta}{d}\right)+\frac{x\cos\theta}{f}\left(1+\frac{x\cos\theta}{d}\right)-\frac{x\cos\theta}{d}\left(1-\frac{x\cos\theta}{f}\right)\right)}{\left[\left(1-\frac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{x\cos\theta}{d}\right)\right]^{3/2}}=$$

$$=\frac{\sin\theta\left(2-2\frac{x\cos\theta}{f}+\frac{x\cos\theta}{d}-2\frac{x^2\cos^2\theta}{df}+\frac{x\cos\theta}{f}-\frac{x\cos\theta}{d}+2\frac{x^2\cos^2\theta}{df}\right)}{\left[\left(1-\frac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{x\cos\theta}{d}\right)\right]^{3/2}}=$$

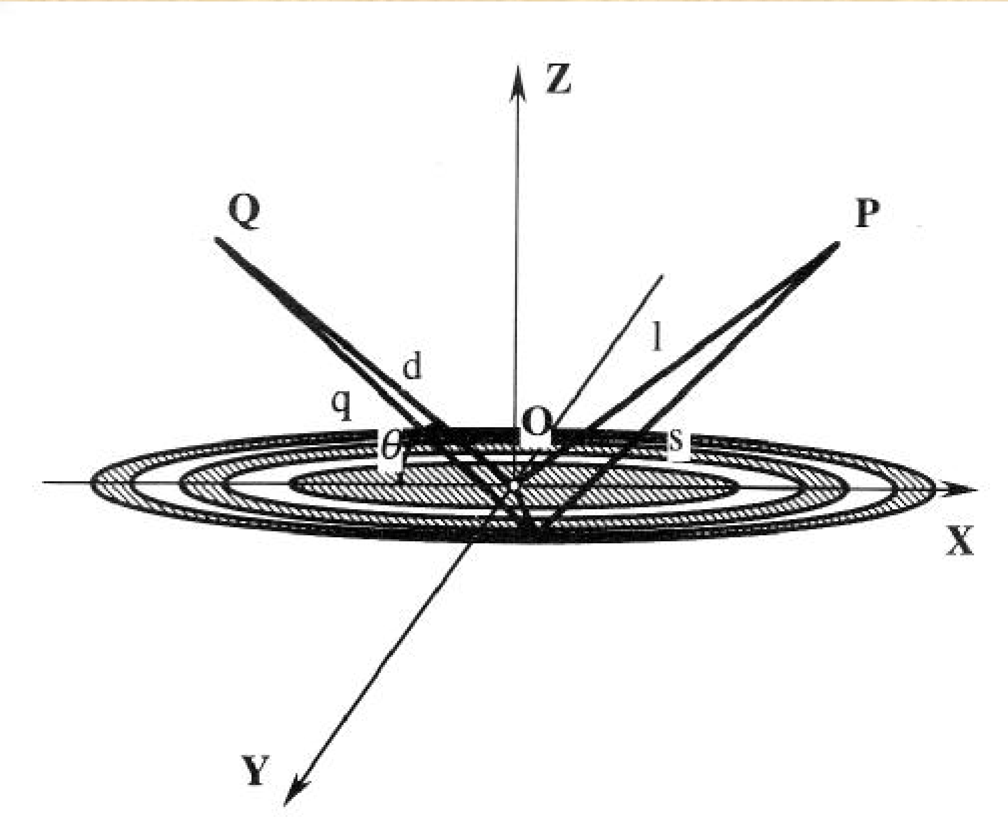
Дифракционная оптика скользящего падения

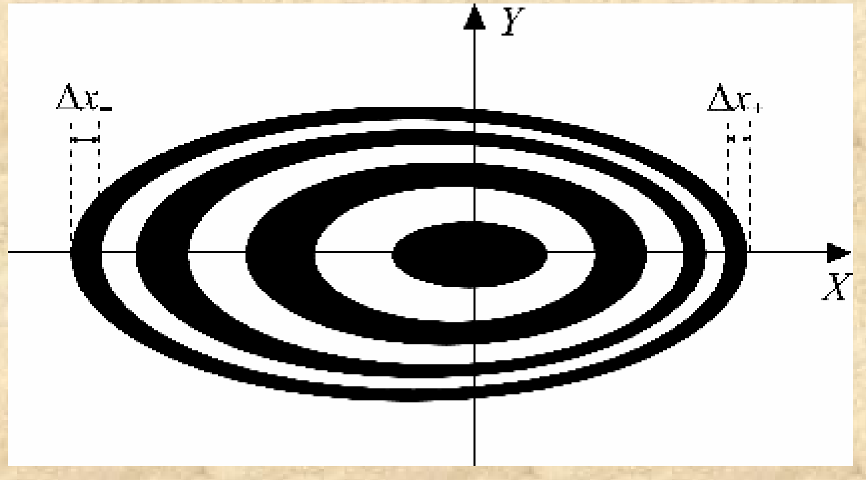
$$
= \frac{\sin\theta\left(1 - \dfrac{x\cos\theta}{f} + 1 + \dfrac{x\cos\theta}{d}\right)}{\left[\left(1 - \dfrac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1 + \dfrac{x\cos\theta}{d}\right)\right]^{3/2}} = \frac{\sin\theta\left(1 - \dfrac{x\cos\theta}{f}\right) + \sin\theta\left(1 + \dfrac{x\cos\theta}{d}\right)}{\left[\left(1 - \dfrac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1 + \dfrac{x\cos\theta}{d}\right)\right]^{3/2}} =
$$

$$
= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \dfrac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1 + \dfrac{x\cos\theta}{d}\right)}}\left(\frac{\sin\theta}{1 + \dfrac{x\cos\theta}{d}} + \frac{\sin\theta}{1 - \dfrac{x\cos\theta}{f}}\right);
$$

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)^{-1} = \left[\frac{1}{\left(1 - \dfrac{x\cos\theta}{f}\right)\left(1 + \dfrac{x\cos\theta}{d}\right)}\left(\frac{\sin\theta}{1 + \dfrac{x\cos\theta}{d}} + \frac{\sin\theta}{1 - \dfrac{x\cos\theta}{f}}\right)\right]^{-1}
$$

Дифракционная оптика скользящего падения





Дифракционная оптика скользящего падения

$$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi. \tag{21}$$

Now equation (5) can be written as

$$\begin{aligned} E(B) = & -\frac{\mathrm{i}C}{2\lambda}\frac{\exp(-\mathrm{i}k(l+d))}{ld} \\ & \times \iint_S F(r,\varphi)\exp\Bigg[-\frac{\mathrm{i}k}{2f} \\ & \times \left(\frac{(r\cos\varphi\sin\theta)^2 + (r\sin\varphi)^2}{[1-(r\cos\varphi\cos\theta)/l][1+(r\cos\varphi\cos\theta)/d]}\right)\Bigg] \\ & \times \left[\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{l}\right)\left(1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)\right]^{-1} \\ & \times \left(\frac{d\sin\theta}{d+r\cos\varphi\cos\theta} + \frac{l\sin\theta}{l-r\cos\varphi\cos\theta}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{22}$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$t = r\sqrt{(\cos\varphi\sin\theta)^2 + (\sin\varphi)^2}$$
$$\times\left[\sqrt{\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{l}\right)\left(1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)}\right]^{-1}$$
$$\varphi = \varphi \tag{23}$$

we obtain

$$E(P) = -\frac{\mathrm{i}C}{2\lambda}\frac{\exp(-\mathrm{i}k(l+d))}{ld}\int_0^{\infty}F(t)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}k}{2f}t^2\right)t\,\mathrm{d}t$$
$$\times\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi. \tag{24}$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi \sin^2\theta + \sin^2\varphi} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{1 - \cos^2\varphi \cos^2\theta}$$
$$= \frac{2\pi}{\sin\theta}. \tag{25}$$

Finally, we have

$$E(P) = -\frac{\mathrm{i}C\pi}{\lambda} \frac{\exp(-\mathrm{i}k(l+d))}{ld}$$
$$\times \int_0^{\infty} F(t) \exp\left(-\frac{\mathrm{i}k}{2f} t^2\right) t \, \mathrm{d}t. \tag{26}$$

In cartesian coordinates the boundaries of Fresnel zones have the form

$$(x \sin\theta)^2 + y^2 \Big/ \left(1 - \frac{x\cos\theta}{l}\right)\left(1 + \frac{x\cos\theta}{d}\right) = fn\lambda.$$

Дифракционная оптика скользящего падения

Приложение 2а. Вычисление якобиана перехода для случая эллиптической ФЗПСП.

$$\left|\frac{J(r,\varphi)}{J(t,\varphi)}\right| = \left|\frac{J(t,\varphi)}{J(r,\varphi)}\right|^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial t}{\partial r} & \dfrac{\partial t}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \end{vmatrix}^{-1} = \left(\frac{\partial t}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial t}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = 1 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right)^{-1} \quad ;$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi}\sqrt{\left(1 - \dfrac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\left(1 + \dfrac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)} - r\sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\varphi} \times}{\left(1 - \dfrac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\left(1 + \dfrac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)}$$

$$\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\left(1 - \dfrac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\left(1 + \dfrac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)}}\left(-\dfrac{\cos\varphi\cos\theta}{f}\left(1 + \dfrac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right) + \dfrac{\cos\varphi\cos\theta}{d}\left(1 - \dfrac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\right)}{} =$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$
= \frac{\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi}\left(2\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\left(1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\right)}{2\left[\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)\right]^{3/2}} =
$$

$$
= \frac{\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi}\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}+1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)}{2\left[\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)\right]^{3/2}} =
$$

$$
= \frac{\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi}}{2\sqrt{\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)\left(1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)}}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{d}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{r\cos\varphi\cos\theta}{f}\right)}\right);
$$

Дифракционная оптика скользящего падения

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-\cos^2\varphi\cos^2\theta}=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-\cos^2\theta\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)}=\left[x=2\varphi\right]=\frac{1}{2}\int_0^{4\pi}\frac{dx}{1-\frac{1}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\cos^2\theta\cos x}=$$

$$\begin{bmatrix} z=e^{ix} \\ dx=\frac{1}{i}\frac{dz}{z} \\ \cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\end{bmatrix}=2\frac{1}{2i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\frac{dz}{1-\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}\quad;$$

Первая цифра 2 появилась из—за того, что область стала многозначной (2 ветви: $0<x<4\pi$). Введем обозначение $\frac{1}{2}\cos^2\theta=b$

$$\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{1}{z}\frac{dz}{1-b-\frac{b}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}=\frac{2}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{2(1-b)z-bz^2-b}\quad;$$

Дифракционная оптика скользящего падения

По теореме о вычетах значение интеграла равно

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right]$$

где Γ — некоторый замкнутый контур.

Если функция $f(z)$ представляется в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

то для полюса 1—го порядка

$$\mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \quad ;$$

Мы имеем два полюса 1—го порядка

Дифракционная оптика скользящего падения

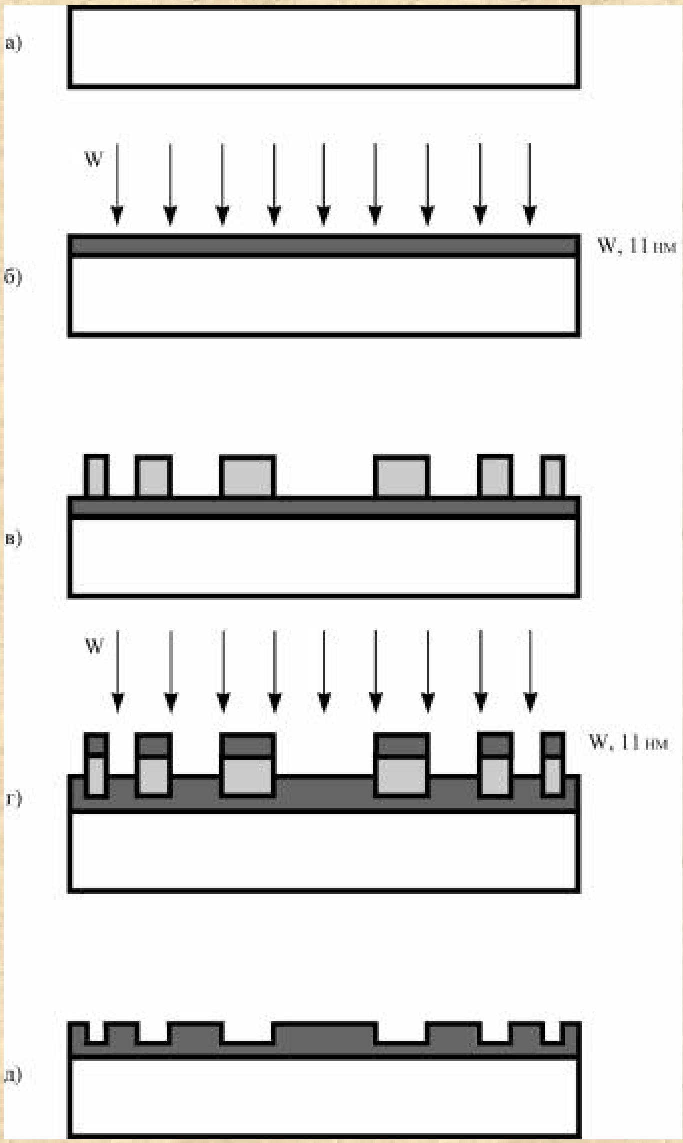
$$z_{1,2} = \frac{2(1-b) \pm 2\sqrt{(1-b)^2 - b^2}}{2b} = \frac{(1-b) \pm \sqrt{1-2b}}{b}$$

из которых только один (со знаком минус) лежит внутри рассматриваемой области.

$$\frac{2}{i} 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left[f(z), z_0\right] = 4\pi \left.\frac{1}{2(1-b) - 2bz}\right|_{z=z_1} =$$

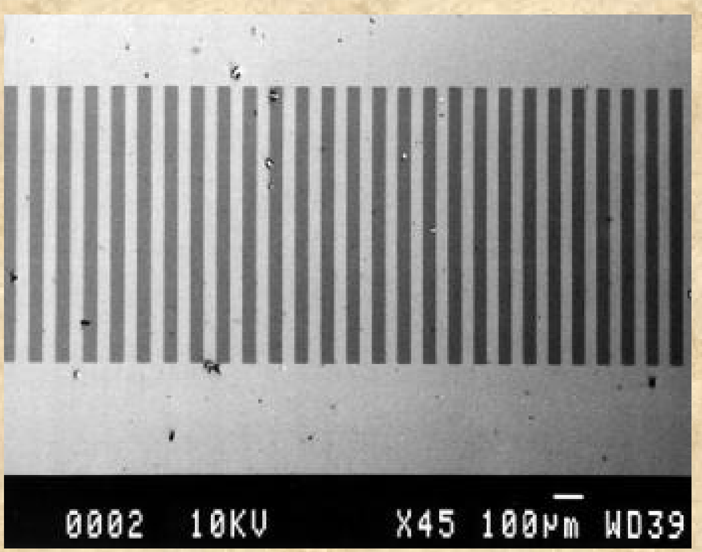
$$= \frac{2\pi}{(1-b) - b\left(\dfrac{(1-b) - \sqrt{1-2b}}{b}\right)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-2b}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \frac{2\pi}{\sin\theta} \quad .$$

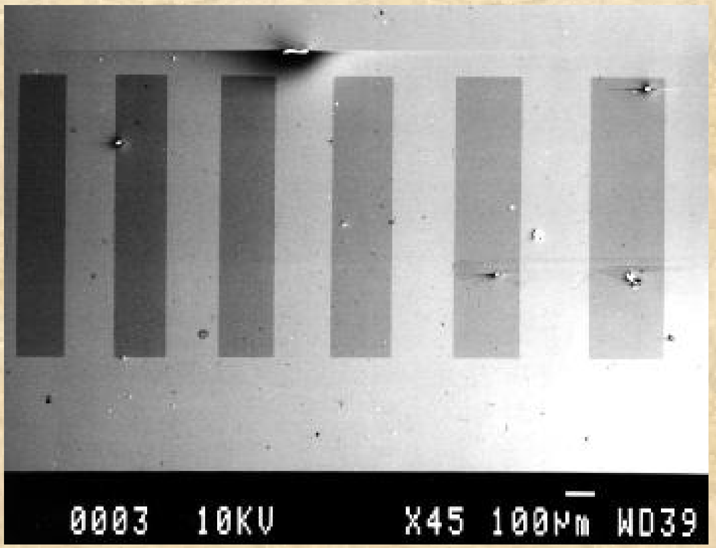
Дифракционная оптика скользящего падения



$$h_p = \frac{l}{4\sin q}$$

Дифракционная оптика скользящего падения





Дифракционная оптика скользящего падения